

GEOMETRIA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

13

Matrices - Determinantes

Teoría y Práctica

A
L

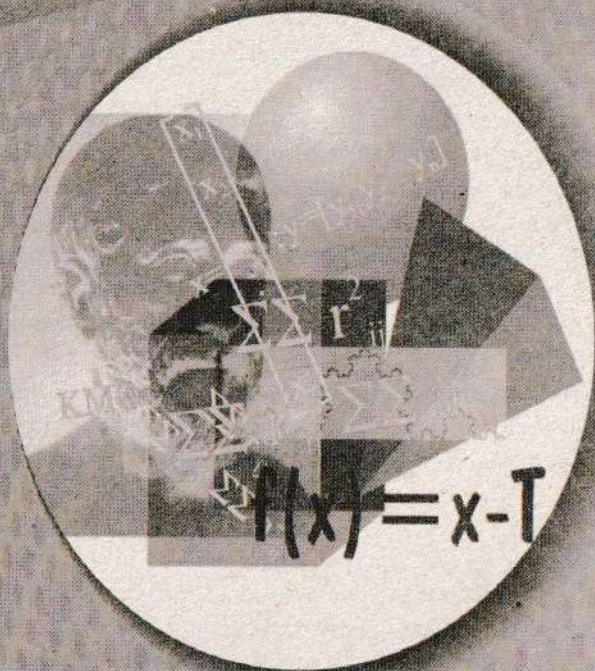


13

Matrices - Determinantes

Teoría y Práctica

A
L
G
E
B
R
A



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODON



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2015, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.

MATRICES - DETERMINANTES



ÁLGEBRA- TEMA SELECTO 13, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Mayo 2015 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2015 - 08285

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

Luz Victoria Carlos Herrera

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ - PRINTED IN PERU

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

MATRICES**DEFINICIÓN**

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas (horizontales) y columnas (verticales). Para representar a una matriz se utilizan letras mayúsculas, veamos algunos ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ORDEN DE UNA MATRIZ

Viene dada por la representación $m \times n$, donde “m” es el número de filas y “n” el número de columnas de la matriz. Para los ejemplos citados anteriormente tenemos:

- A es una matriz de orden 2×3
- B es una matriz de orden 3×3

FORMA GENERAL DE UNA MATRIZ DE “m” FILAS Y “n” COLUMNAS

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde a_{ij} es el elemento genérico ubicado en a fila i , columna j .

En forma abreviada se tendrá:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m = \overline{1; m}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n = \overline{1; n}$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 13**MATRICES ESPECIALES**

1. **MATRIZ FILA:** Es aquella matriz que tiene una sola fila.

$$A = [1 \quad 5 \quad 7 \quad 10]$$

2. **MATRIZ COLUMNA:** Es aquella matriz que tiene una sola columna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. **MATRIZ RECTANGULAR:** Es aquella matriz donde el número de filas y el número de columna son diferentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. **MATRIZ CUADRADA:** Es aquella matriz donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

5. **MATRIZ NULA:** Es aquella matriz donde todos sus elementos son iguales a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Dadas las matrices:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Si estas son iguales, es decir $A = B$ se verifican simultáneamente las condiciones:

- I. A y B son de igual orden: $m \times n$
- II. Los elementos correspondientes son iguales: $a_{ij} = b_{ij}$

OPERACIONES CON MATRICES

1. **ADICIÓN:** Dadas las matrices de igual orden

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Se define:

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

- Hallemos la matriz $A + B$, a partir de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (2+1) & (1+2) & (3+5) \\ (0-1) & (-1+4) & (2+3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. MULTIPLICACIÓN

2.1 Multiplicación de un escalar por una matriz:

$$\text{Sean: } A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge k \in \mathbb{R}$$

Se define:

$$k \cdot A = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

- Multipliquemos por 2 a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2 Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

$$\text{Sean: } A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}] \wedge B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Se define:

$$A \cdot B = [a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}]$$

- Multipliquemos A por B, donde:

$$A = [2 \ 1 \ 3] \wedge B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [2 \ 1 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [(2) \cdot (2) + (1) \cdot (4) + (3) \cdot (6)] = [4 + 4 + 18]$$

$$\therefore A \cdot B = [26]$$

2.3 Multiplicación de dos matrices:

Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por $A \cdot B$ si se verifica lo siguiente:

$$\boxed{\text{N}^\circ \text{ de columnas A} = \text{N}^\circ \text{ de filas de B}}$$

Luego:

$$A_{m \times \underbrace{p}_{\text{iguales}}} \cdot B_{\underbrace{p}_{\text{iguales}} \times n} = C_{m \times n}$$

- Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

¿Existe $A \cdot B$? Veamos:

A tiene orden $2 \times 2 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de col} = 2$

B tiene orden $2 \times 3 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de fil} = 2$

Como: $\text{N}^\circ \text{ col de A} = \text{N}^\circ \text{ fil de B}$ se afirma que si existe $A \cdot B$ cuyo orden es 2×3

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica de forma similar que en el caso (2.2)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (2)(2) + (-1)(1) & (2)(-2) + (-1)(2) & (2)(5) + (-1)(-3) \\ (3)(2) + (1)(1) & (3)(-2) + (1)(2) & (3)(5) + (1)(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4-1 & -4-2 & 10+3 \\ 6+1 & -6+2 & 15-3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 13 \\ 7 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

¿Existe $B \cdot A$? Veamos:

$\text{N}^\circ \text{ col de B} = 3$ y $\text{N}^\circ \text{ fil de A} = 2$

Como: $\text{N}^\circ \text{ col de B} \neq \text{N}^\circ \text{ fil de A}$, se podrá afirmar que $B \cdot A$ no existe.

En general: El producto matricial no es conmutativo.

Teoremas:

Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además el escalar k

- 1) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- 2) $A + B = B + A$
- 3) $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- 4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- 5) $A \cdot B = 0$ no implica $A = 0 \vee B = 0$
- 6) $A \cdot B = A \cdot C$ no implica $B = C$

Propiedades:

Sean las matrices A y B de modo que existen A . B y B . A

- 1) Si: $A \cdot B = B \cdot A$ se dice que A y B son matrices conmutables.
- 2) Si: $A \cdot B = -B \cdot A$ se dice que A y B son matrices anticonmutables.

3. **POTENCIACIÓN:** Siendo A una matriz cuadrada y "n" un entero positivo, se define:

$$A^n = \begin{cases} A & ; n = 1 \\ \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{\text{"n" veces}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

- Hallemos A^2 si: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2)(2) + (-1)(3) & (2)(-1) + (-1)(1) \\ (3)(2) + (1)(3) & (3)(-1) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 - 3 & -2 - 1 \\ 6 + 3 & -3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

TRANSUESTA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar las filas de A en columnas.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

- Veamos un ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

Siendo A y B matrices y el escalar k

- 1) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- 2) $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
- 3) $(A^T)^T = A$
- 4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

3. **MATRIZ IDENTIDAD (I):** Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad, veamos un ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:** Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros, veamos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR:** Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros, veamos un ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS MATRICES CUADRADAS

1. **MATRIZ SIMÉTRICA:** Si A es una matriz simétrica, verifica

$$A^T = A$$

2. **MATRIZ ANTISIMÉTRICA:** Llamada también matriz Hemisimétrica. Si A es una matriz antisimétrica, verifica:

$$A^T = -A$$

3. **MATRIZ IDEMPOTENTE:** Si A es una matriz idempotente, verifica:

$$A^2 = A$$

4. **MATRIZ INVOLUTIVA:** Si A es una matriz involutiva, verifica:

$$A^2 = I; \text{ (matriz identidad)}$$

5. **MATRIZ NILPOTENTE:** Si A es una matriz nilpotente, verifica:

$$A^P = 0; \text{ (matriz nula)}$$

Donde $P \in \mathbb{N} / P \geq 2$

DETERMINANTES**DEFINICIÓN**

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real). Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así: $\det(A)$ ó $|A|$

DETERMINANTE DE ORDEN UNO

$$A = [a] \rightarrow |A| = a$$

DETERMINANTE DE ORDEN DOS

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$|A| = a \cdot d - b \cdot c$$

DETERMINANTE DE ORDEN TRES

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Según la regla de Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} & & a & b & c \\ & & d & e & f \\ & & g & h & i \\ \oplus \left\{ \begin{array}{l} c \cdot e \cdot g \\ f \cdot h \cdot a \\ i \cdot b \cdot d \end{array} \right. & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} a \cdot e \cdot i \\ d \cdot h \cdot c \\ g \cdot b \cdot f \end{array} \right. & \oplus \end{array}$$

$\overline{\oplus} = N$
 $\overline{\oplus} = M$

$$|A| = M - N$$

MEJOR COMPLEMENTARIO DE UNA COMPONENTE

El menor complementario de la componente (elemento) a_{ij} denotado por M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz dada.

• Para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

El menor complementario de $a_{12} = 4$ es:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (5) \cdot (3) - (1) \cdot (2) = 15 - 2$$

$$\therefore M_{12} = 13$$

COFACTOR DE UNA COMPONENTE

El cofactor de la componente (elemento) a_{ij} denotado por C_{ij} se define de la manera siguiente:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

• Para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

El cofactor de la componente a_{13} es:

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (1) \cdot [(1) \cdot (3) - (2) \cdot (-1)] = 3 + 2$$

$$\therefore C_{13} = 5$$

Teorema:

El determinante de una matriz será igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

• Para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Con los elementos de la primera fila:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2) \cdot (9) - (1) \cdot (7) + (-3) \cdot (-13)$$

$$|A| = 18 - 7 + 39$$

$$\therefore |A| = 50$$

**OBSERVACIÓN**

Para aplicar al teorema anterior se recomienda escoger la fila (o columna) que presente más ceros.

Propiedades: Dadas las matrices cuadradas A y B y el escalar k:

- 1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- 2) $|A^T| = |A|$
- 3) $|k \cdot A| = k^n |A|$; "n" orden de A
- 4) Si dos filas (o columnas) son proporcionales el determinante será igual a cero.
- 5) Si todos los elementos de una fila (o columnas) son ceros el determinante será igual a cero.
- 6) Si se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.
- 7) El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se le aumenta un múltiplo de otra fila.
- 8) El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

DETERMINANTE DE VANDERMONDE**1) DE ORDEN DOS**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2) DE ORDEN TRES

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c - b)(c - a)(b - a)$$

3) DE ORDEN CUATRO

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d - c)(d - b)(d - a)(c - b)(c - a)(b - a)$$

DEFINICIÓN

Una matriz cuadrada A es no singular, también llamada regular, si $|A| \neq 0$, así mismo si $|A| = 0$, la matriz A será singular.

MATRIZ INVERSA**DEFINICIÓN**

Dada una matriz cuadrada no singular A , si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I$ (matriz identidad), entonces definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1} .

Teorema:

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si es una matriz no singular, en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades:

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar k :

$$1) \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$2) \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$3) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$4) \quad (k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$5) \quad |A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$$

OBTENCIÓN DE MATRICES INVERSAS

1) DE ORDEN UNO

$$A = [a] \rightarrow A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right]; a \neq 0$$

- Para $A = [-2]$, la inversa será:

$$A^{-1} = \left[-\frac{1}{2} \right]$$

2) DE ORDEN DOS

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Para:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (3) \cdot (2) - (2) \cdot (1) = 6 - 2 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$



OBSERVACIÓN

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss - Jordan, que consiste en construir una matriz ampliada ($A : I$) de donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada ($I : B$) con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A , es decir: $B = A^{-1}$.



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular:
- $a+b-c$
- ; si:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 15 & 14 \\ 8 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{bmatrix}$$

- A) 26 B) 28 C) 42
D) 54 E) -26

2. Sean:
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
- y
- $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- ;

si x y y son dos matrices de orden 2×2 , tal que:

$$\begin{cases} x+2y = A \\ x-y = B \end{cases} ; \text{ entonces } x \text{ es:}$$

- A) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ 4 & -7 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

3. Calcular la suma de los elementos de la primera fila de la matriz:

$A \cdot (2B - 3C)$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad y$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- A) -2 B) 58 C) -58
D) 30 E) 2

4. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix} \quad y$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; \text{ siendo } A=B$$

Determine $3A+2C$

$$A) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad B) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad D) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$E) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

5. El siguiente producto matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} ; \text{ equivale a :}$$

$$A) \begin{bmatrix} 41 & 112 \\ 73 & 195 \end{bmatrix} \quad B) \begin{bmatrix} 41 & 121 \\ 37 & 195 \end{bmatrix}$$

$$C) \begin{bmatrix} 41 & 112 \\ 73 & 194 \end{bmatrix} \quad D) \begin{bmatrix} 40 & 110 \\ 72 & 196 \end{bmatrix}$$

$$E) \begin{bmatrix} 39 & 117 \\ 73 & 159 \end{bmatrix}$$

6. Dada la siguiente ecuación matricial:

$$(A^T + B)^T + 2A - x = 0 ; \text{ donde:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; \text{ encontrar:}$$

la matriz x para luego indicar el mayor de sus elementos.

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 9 E) 11

7. Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$

definida así:

$$a_{ij} = \begin{cases} -3 & \text{si } i+j < 4 \\ i-j & \text{si } i+j \geq 4 \end{cases}; \text{mostrar}$$

su forma desarrollada, para luego calcular la suma de todos sus elementos.

- A) -6 B) -8 C) -10
D) -12 E) -14

8. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix};$$

si A y B son matrices conmutables.
Calcular el valor de $m+n$:

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. Si M es una matriz triangular inferior:

$$M = \begin{bmatrix} a+b & a+6 & b+9 \\ a-b & 2a & a+b+15 \\ 2a-b & 4b & 7a \end{bmatrix}$$

Calcular "a-b"

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

10. Calcular el valor de "m-n+p", si:

$$A = \begin{bmatrix} a-8 & p-b & m-a \\ a-5 & b-9 & n-b \\ 5-a & b-2 & -2c+5 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal

- A) 5 B) 3 C) 1
D) 7 E) 9

11. Dada las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcular: $(A+B)^2$

- A) 5I B) 4I C) 3I
D) 2I E) I

12. Calcular "r-s+t" si la matriz:

$$\begin{bmatrix} r-4 & \frac{a}{3} & b-10 \\ \frac{a}{2} & s-8 & 10-s \\ 6-r & r+s-16 & t-9 \end{bmatrix}; \text{ es escalar}$$

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

13. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ hallar la suma de los elementos de } A^{40}$$

- A) 6^{13} B) 6^{14} C) 6^{15}
D) 6^{16} E) 6^{12}

14. Si $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$; encontrar la matriz

$$E = A + 2A + 3A + \dots + nA; n \in \mathbb{N}^*$$

indicar por respuesta la suma de sus elementos.

- A) 0 B) 1 C) $n(n+1)$
D) $2n(n+1)$ E) $\frac{n}{2}(n+1)$

15. Dada la matriz: $M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$;

la matriz M^{1003} es:

A) $\alpha^{1003} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\alpha^{1003} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\alpha^{1003} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ D) $\alpha^{1003} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

E) $\alpha^{1003} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. Si la matriz: $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix}$; es

idempotente, calcular "n-m"

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

17. Dada la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, ella se puede

expresar como la suma de una matriz simétrica B y otra antisimétrica C; luego la matriz C es:

A) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

18. Sea: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

- A) $A^n = I$; para todo n par. ($n \in \mathbb{N}$)
B) $A^n = I$; para todo n impar ($n \in \mathbb{N}$)
C) $\det(A^n) \neq 0$; para todo $n \in \mathbb{N}$
D) $\det(I + A^n) \neq 0$; para todo $n \in \mathbb{N}$
E) $\det(I - A^n) = 0$; para todo $n \in \mathbb{N}$

19. Luego de hallar la matriz de cofactores de M, indicar la suma de sus elementos.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

- A) 8 B) 10 C) 12
D) 6 E) 14

20. Si: $x \in \mathbb{R}^2$ es solución de la ecuación matricial " $A \cdot x = B$ "; calcular:

TRAZ ($x^t \cdot B$), donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $\frac{1}{2}$

21. Resolver:

$$\begin{bmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{bmatrix} = 0$$

Indicar un valor de x.

- A) 1 B) 2 C) -1
D) -2 E) 3

22. A es una matriz de orden 3, si se intercambian la primera y la tercera fila, se obtiene la matriz A_0 ; en A_0 a la primera fila se le multiplica por 3 y a la tercera por 2 obteniéndose la matriz A_1 , de manera que: $\det(A_1) = 66$

Hallar: $\det(A^{-1})$

- A) -11 B) $-\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{33}$
D) 11 E) $\frac{1}{6}$

23. Sea A una matriz de orden 2×2 con $A^2 = B$, donde $b_{21} = 0 \wedge a_{21} \neq 0$, si:
 $\text{TRAZ}(B) = b_{11} + b_{22}$; entonces el
el valor de $\text{TRAZ}(B) + 2\det(A)$; es:

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

24. Sean: a, b, c números reales positivos, entonces el valor de x tal que:

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0; \text{ es:}$$

- A) $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ B) $-\frac{abc}{ab+ac+bc}$
C) $\frac{-abc}{a+b+c}$ D) $\frac{abc}{a+b+c}$
E) abc

25. Sea el polinomio: $f(x) = x^2 - 2x - 1$ y la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular la suma de los elementos de $f(A)$.

- A) 1 B) 2 C) 0
D) -1 E) -2

26. Sea la matriz:

$$H = \begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix} \text{ tal que: } \det(H) = 4;$$

luego H^2 es:

- A) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

27. Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; \text{ cuando "n" es un número entero positivo muy grande}$$

¿A qué valor se aproxima la suma de los elementos de la diagonal principal de A^n ?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{9}$
D) 2 E) $\frac{1}{8}$

28. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

Encontrar:
 $u+v+w+x+y+z$; si se cumple que:
 $A \cdot B = I$ (I es la matriz identidad).

- A) 21 B) 20 C) 18
D) 15 E) 7

29. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix}; \text{ donde}$$

i es la unidad imaginaria y w es la raíz cúbica de la unidad imaginaria.

Halle Traz (C^{-1}) , siendo:

$$C = \sum_{K=1}^{40} (A^{4K} + B^{3K})$$

A) $\frac{1}{160}$ B) 80 C) $\frac{1}{80}$

D) 40 E) $\frac{1}{40}$

30. Si:

$$A = [a_{ij}]_{23 \times 2} \quad / \quad a_{ij} = i + j$$

$$B = [b_{ij}]_{2 \times 41} \quad / \quad b_{ij} = 2i + 3j$$

siendo $C = A \cdot B$; calcular el valor del elemento C_{34} .

A) 136 B) 121 C) 114

D) 125 E) 134

31. Se tiene la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ tal que } A = B + C;$$

donde $B = [b_{ij}]$ matriz simétrica;

$C = [C_{ij}]$ matriz antisimétrica;

luego, el valor de $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ es

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{6}{2}$ C) $\frac{7}{2}$

D) $\frac{8}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

32. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} (n+1)a^{n+4} & a^{n+5} \\ a^{n+5} & 0 \end{bmatrix}; \text{ encontrar}$$

matriz x de orden 2, de $A^n \cdot x \cdot B = C$

A) $\begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -a^4 & 0 \\ 0 & -a^4 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ -a^4 & 0 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$

33. El equivalente de:

$$\sqrt[3]{\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}}; \text{ es:}$$

A) abc B) $a+b+c$ C) $a^2+b^2+c^2$

D) $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ E) $(a+b+c)^3$

34. Dada la matriz:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & K \end{bmatrix} \text{ y } |A| = 4$$

hallar el valor de " K ".

A) 6 B) -12 C) 12

D) -6 E) 8

35. Luego de resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (1-x) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (2-x) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (3-x) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & ((n-1)-x) \end{vmatrix} = 0$$

Indicar por respuesta la suma de sus raíces.

A) $\frac{n(n+1)}{2}$ B) $\frac{(n-1)n}{2}$ C) $\frac{n^2-1}{2}$

D) $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ E) $\frac{(n-2)n}{2}$

36. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determina la matriz A^{215}

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -215 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -430 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 430 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 215 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & (-2)^{215} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. Sea la matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que

$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si } i \neq j \\ 2; & \text{si } i = j \end{cases}$; hallar la suma de los elementos de la matriz A^n

A) 2^{n+1} B) $5(2^n)$ C) $2(3^n)$

D) $4(3^n)$ E) n^{n-2}

38. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$; $a_{ij} = 1$;

$1 \leq i \leq n$, determine la suma de los elementos de A^n

A) n^{2n} B) n^{n+1} C) n^{n+2}

D) n^{n-1} E) n^{n-2}

39. Determine el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que

$a^n = 0$, 0 matriz nula y donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

40. Si $B = P^{-1} \cdot AP$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix};$$

calcule la traza de B.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

41. Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; halle la

suma de los elementos de la matriz:

$$(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1}$$

A) $-\frac{5}{7}$ B) $-\frac{6}{7}$ C) $\frac{5}{7}$

D) $\frac{6}{7}$ E) 3

42. Al determinar
- A^{-1}
- , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \mu \end{bmatrix}$$

Calcular $\alpha+\beta+\gamma+\mu$ si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{16} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{15} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15}$$

- A) 2^{-14} B) -2^{12} C) -2^{-10}
D) -2^{-8} E) -2^{-6}

43. Si
- $(A+I)^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
- ; I: matriz identidad de orden 2. Determine x a partir de
- $(AXA^{-1})^t = 3(A-I)$
- ; e indique la traza de x.

- A) -20 B) -15 C) -10
D) -5 E) 3

44. Resolver la ecuación matricial:

$$(AX^{-1}B)^t = AB, \text{ donde}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dando como respuesta la traza de la matriz incógnita.

- A) 10 B) 12 C) 11
D) 14 E) 0

45. Si
- $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix}$
- y cumple:

$$A^2 - 5A + 5I = 0; \text{ determine:}$$

TRAZ $(A-3I)$ Siendo $a+e+h = 15$

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

46. Si A es una matriz cuadrada no singular que cumple
- $A^3 = 2I$
- , determine la matriz inversa de:

$$A^2 + A + I$$

- A) $A+I$ B) $A-I$ C) $A+2I$
D) $A-2I$ E) $A+3I$

47. Si A, B son matrices cuadradas del mismo orden e invertibles, despeje x, a partir de:

$$A(xB+B^{-1})B = BA(A^{-1}B^{-1}+A^{-1});$$

$$\text{Si } B-A=I$$

- A) $A^{-1}B^{-2}$ B) $2A^{-2}B^{-1}$ C) $A^{-2}B^{-1}$
D) $2A^{-1}B^{-2}$ E) $2(AB)^{-1}$

48. Si
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$
- calcular
- $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{vmatrix}$

- A) -40 B) -30 C) -20
D) 10 E) 20

49. Sea
- $P(x) = |A|$
- , donde:

$$A = \begin{bmatrix} a^x + 2b^x & -c^x \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ además } P_{(1)} = 0$$

y $abc \neq 0$. Determine el valor de:

$$E = \frac{5}{6} \left[\frac{a^3 + 8b^3 + 8c^3}{abc} \right]$$

- A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

50. Sea A una matriz de orden
- 4×4
- , con
- $|A| = 2$
- ; determine el valor de:

$$E = |A| A^2 |A^3|$$

- A) 2^9 B) 2^{13} C) 2^{14}
D) 2^{15} E) 2^{16}

51. Sea $A = \begin{bmatrix} 27x^2 & 3 \\ 9x & 6 \end{bmatrix}$; donde $|A| = 27$;

determine el valor de:

$$E = 36x^2 + \frac{1}{x^2}$$

- A) 12 B) 13 C) 15
D) 16 E) 17
52. Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Determine el valor de:

$$\left| A^{-1} \begin{vmatrix} 2 & A^t \\ |A| \end{vmatrix} \right| \text{ si } |A| \neq 0$$

- A) $2^n |A|^{n^2-n}$ B) $2^n |A|^{1-n^2}$
C) $2 |A|^{-n^2+n-1}$ D) $2^{n^2} |A|^{-n^2+n}$
E) $2^{n^2} |A|^{-n^2+n-1}$

53. Si $abc \neq 0$, hallar el valor de $T = \frac{|A|}{abc|B|}$ sabiendo que:

$$A = \begin{bmatrix} -2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & -2ac & a^2 \\ b^2 & a^2 & -2ab \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

- A) -6 B) -4 C) -2
D) 2 E) 4

54. Determine el valor de la constante "K" si:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

- A) $-\frac{1}{2}$ B) -1 C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

55. Si:

$$M = \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 4 & \ln 8 \\ \ln 8 & \ln 256 & \ln 512 \\ \ln 4 & \ln 16 & \ln 64 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \ln \frac{1}{2} & \ln 4 & \ln 16 \\ \ln \frac{1}{4} & \ln 256 & \ln 1024 \\ \ln \frac{1}{8} & \ln 32 & \ln 128 \end{bmatrix};$$

Hallar $|M|$. Nota: $\ln(x) = \log_e(x)$

- A) $3 \ln 2$ B) $4 \ln 2$ C) $5 \ln 2$
D) $\ln^3 2$ E) $\ln^2 2$
56. Determine: $|A|$, si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

- A) $(a+b)(a+c)(b+c)$
B) $(a-b)(b-c)(a+c)$
C) $(a-b)(b-c)(c-a)$
D) $(a+b)(b-c)(c-a)$
E) $(a-b)(b+c)(c-a)$

57. Sea:
- $M = \{A / \det(A) = 0\}$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 72 & z \\ 105 & 108 & z+3 \\ 140 & 144 & z-3 \end{bmatrix}$$

Determinar $n(M)$

- A) -3 B) 0 C) 1
D) 2 E) No se puede determinar

58. Dada la matriz
- $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$
- donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} i & ; i > j \\ 1 & ; i = j \\ j & ; i < j \end{cases} ; \text{ determina } |A|:$$

- A) -99 B) -98 C) -97
D) -63 E) -45

59. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

- A) 40 B) 44 C) 45
D) 48 E) 49

60. Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & a \end{bmatrix}$$

Determine el valor de verdad de los siguientes enunciados:

- I) $\exists a \in \mathbb{N} / |A| > 0$
II) $\exists! a \in \mathbb{N} / |A| = 0$
III) $\exists! a \in \mathbb{N} / |A| < 0$

- A) VFV B) FVV C) FFF
D) VFF E) VVV

61. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} ; \text{ calcule } |B|$$

Si $B = 3A^2$

- A) 115 B) 232 C) 324
D) 410 E) 512

62. Determine el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 24

63. Calcule:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 32

64. Si
- $B = (b_{ij})_{n \times n}$
- ; tal que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \quad y$$

$$AB + AB^t = 8I ; \text{ halle } |A|$$

- A) 3 B) 2 C) 2^n
D) 3^n E) 6^n

65. Sea: $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden "n".
Si:

$$a_{ij} = \begin{cases} x+m & ; i=j \\ x & ; i \neq j \end{cases} ; \text{determine } |A|$$

- A) $(nx+m)m^2$
B) $(nx-2m)m^3$
C) $(nx+3m)m^4$
D) $(nx)m^n$
E) $(nx+m)m^{n-1}$

66. Dada la matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+b \\ a & b & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular $a^2 + b^2 + c^2$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 8

67. La matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{pmatrix}$

verifica la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & m & 10 \\ 17 & 23 & 29 \end{pmatrix}$$

Hallar el valor de $m+b$

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

68. Si la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & x+y & x^2+z \\ -3 & y^2 & 3y \\ 5 & -3 & y^2 \end{bmatrix}$$

Satisface que $(A^T)^T = A^T$
Calcular el valor de $V = x+y+z$.

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

69. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $(A+B)^2 = A^2 + B$, entonces AB es la matriz nula.

II. Si $B^T A^T$ es una matriz columna, entonces A es una matriz fila.

III. Si $A^2 = I$, entonces $A = I$.

- A) VVV B) FVF C) FVV
D) VFF E) FFF

70. Sea $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ tal que satisface la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + 5I^{20}$$

Halle la suma de los elementos de la matriz X, sabiendo que $x_{12} = 2$ y $x_{23} = 6$

- A) 15 B) 21 C) 23
D) 25 E) 30

71. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si A es una matriz antisimétrica, entonces A^2 es antisimétrica.

II. Para toda matriz A; AA^T es una matriz cuadrada.

III. Si $(A-A^T)BC$ es una matriz cuadrada de orden n , entonces cada matriz A, B y C tiene que ser cuadrada de orden n .

- A) VVF B) FVV C) FFF
D) VVV E) FVF

72. Dado el sistema matricial

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

determine la traza de la matriz producto AB.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

73. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y el polinomio $P(x) = x^2 - x + 1$,
determine la traza de $P(A)$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

74. Sea la matriz
- $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Si:

$$B = A^n + (A^T)^n + A^{n-1} + (A^T)^{n-1} + \dots + A + (A^T)$$

con $n \in \mathbb{N}$

Halle la $\text{tr}(B)$

- A) $-2n$ B) $-n$ C) n
D) $2n$ E) $3n$

75. Calcule:
- $\frac{a+b}{c}$
- si se cumple:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, c \neq 0$$

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

76. Siendo

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}; B = [b_{ij}]_{n \times n}; C = [c_{ij}]_{n \times n}$$

determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. Si A es antisimétrica, entonces
 $a_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$

- II. Si $AB = AC$, entonces $B = C$

- III. Si A es simétrica entonces A^2 es simétrica.

- A) VFF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FFV

77. Si
- $A^{31} = 2I$
- y
- $M = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{30}$
- ,

hallar $AM - M + I$.

- A) $2I$ B) $3I$ C) I
D) $4I$ E) $6I$

78. Se tienen las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$C = A^n (B^{n+1} - B^n)$$

donde la suma de elementos de C es 2187, entonces el valor de n es:

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

79. Encontrar el valor de

$$E = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & 7 \\ 5 & 10 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

80. Se definen las matrices:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 4} / a_{ij} = \max \{i; j\},$$

$$B = (b_{ij})_{4 \times 3} / b_{ij} = \min \{i; j\},$$

$$C = (c_{ij})_{3 \times 3} / c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i=j \\ b_{ij}, & i \neq j \end{cases} \text{ y}$$

$$D = AB + C$$

Luego la traza de D es:

- A) 60 B) 62 C) 66
D) 70 E) 77

81. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; B = [b_{ij}]_{2 \times 2} \text{ tal que}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 2i-3j, & i \leq j \\ i^2+2j, & i > j \end{cases} \text{ y } X = [x_{ij}]_{2 \times 2} \text{ que}$$

satisfacen la ecuación matricial:

$$AX + I = B^2$$

Halle la $\text{tr}(X)$.

- A) -10,5 B) -15 C) -22
D) -28,5 E) -31,5

82. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si A y B son matrices tal que $AB = I$, entonces $A = B^{-1}$

II. Si $A = kB$ con B de orden 3 entonces $A^3 = k^3 B^3$

III. Si A y B conmutan, entonces A y $mB + nI$ también conmutan.

- A) VVV B) VFF C) FFF
D) VFV E) FVV

83. Si $A = 2I$, $B = 3I$. Calcular:

$$\left(A^{-1} B^{-1} + 2AB - \frac{1}{6}I \right)$$

- A) I B) 2I C) 3I
D) 6I E) 12I

84. Sea $M = \left\{ A = (a_{ij})_{n \times n} / A^t = A \right\}$

Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

I. $\exists B \in M / B^t = B^2$

II. Si $A, B \in M$ entonces $AB \in M$

III. $\forall A, B \in M: \exists A^1 \in M$

IV. Si $A, B \in M$ entonces $A + B \in M$

V. $\exists A \notin M / A^2 \in M$

Indicar cuántas son verdaderas.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

85. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la suma de los elementos de A^{-1} es:

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

86. Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$ que cumple $A^4 + 2A^3 + A + I = 0$, 0 es la matriz nula.

Determine la inversa de $A^3 + I$

- A) $A + I$ B) $2A + I$ C) $A + 2I$
D) $A + 3I$ E) $A + 4I$

87. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Si $B = A^{-1}$

Halle el valor de

$$M = (b_{11})(b_{33}) - b_{21} + b_{32}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

88. Determine la matriz inversa de:

$$A^{2010} + I \text{ si la matriz } A \text{ verifica que:}$$

$$A^{4020} + A^{2011} + 2A^{2010} + A = 0 \quad |A| \neq 0$$

- A) $A^3 + A + I$ B) $A^{2010} + A$
C) $A^{2010} - I$ D) $A^{2010} + I$

E) $A^{2010} + A + I$

89. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} (0,2)^{x+2} & 1 \\ x+2z & 8^{(7y+5)/3} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ y & -4^{3y+2} \end{bmatrix} \quad y$$

$$C = \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se cumple que $A+B=C$, hallar $E=xyz$

- A) -20 B) -5 C) 0
D) 5 E) 20

90. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial siguiente

$$\left[\left((B^{-1})^T + A \right) X \right]^T = X^T A + B^{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

entonces la matriz X es:

$$A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C) \begin{pmatrix} 1 & -n & n^2 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D) \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n^2-3n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \frac{n^2-3n}{2} & -n & 1 \end{pmatrix}$$

91. Sean
- A
- ,
- C
- y
- B
- , matrices del mismo orden 3, tal que:

$$|A| = -2^8, |B| = 3 \quad y \quad |C^T| = -1$$

Hallar el valor de

$$E = \frac{|2A|B^T|}{2|2C|A^T|}$$

- A) $-2^3 \cdot 3$ B) $-2^5 \cdot 3$ C) $-2^8 \cdot 3$
D) $-2^{10} \cdot 3$ E) $-2^{13} \cdot 3$

92. Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 4 E) 12

93. Se definen las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces el determinante de la matriz $C^8 D^9$ es.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

94. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones:

I. $|A| |A| |A| = |A|^{n^2+1}$, A es de orden $n \times n$.

II. Si $A \cdot A^T = I^{20}$ entonces $|A| = \pm 1$, A es de orden n .

III. Si $AB + AB^T = 3I$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $|A| = 1$

- A) FVF B) FVV C) VVF
D) FFV E) VVV

95. Encuentre el determinante de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$

- A) $-(a-b)^4$ B) $(a-b)^4$ C) $(a+b)^4$
D) $a(a+b)^3$ E) $b(a-b)^3$

96. Si "x" e "y" son números reales y se tiene la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 3x & y+2x & y+1 \\ 2y & y+1 & 2-y & 1 \\ x+2 & 0 & 1 & x+3 \\ y-1 & 1 & x+2 & x+y \end{pmatrix}$$

entonces $|A|$ es igual a:

- A) $x+y$ B) x^2+y+4 C) 0
D) x^2-y^2+2xy E) x^3+y^3

97. Sea la siguiente igualdad de determinantes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$

El valor de $\alpha^3 + 3\alpha + 2$ es:

- A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 20

98. Determinar el número de factores primos de

$$F(a, b, c) = \begin{vmatrix} a^3 & 1 & a \\ b^3 & 1 & b \\ c^3 & 1 & c \end{vmatrix}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

99. Determinar el valor de μ si:

$$\mu = \sqrt[3]{\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

- A) 0 B) -1 C) -2
D) -3 E) -4

100. La solución de un sistema de ecuaciones lineales, no homogéneo es (x_0, y_0) , donde $x_0 = y_0$ dada según la regla de Cramer por

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ n & 2 \end{vmatrix}}{d}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & m \\ 5 & n \end{vmatrix}}{d}$$

Si "m" y "n" son primos relativos, entonces un valor para $m+n+d$ es:

- A) -3 B) -1 C) 0
D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución 1: Efectuando la adición de matrices en el 1er miembro, la igualdad dada será:

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 26 & 18 \\ 13 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices, igualaremos los elementos de igual posición, obteniéndose:

$$a=28 ; b=26 ; c=28$$

Finalmente el valor pedido será:

$$\therefore a+b+c=26$$

Rpta.: A

Resolución 2: A partir del sistema:

$$\begin{cases} x+2y = A & \dots (I) \\ x-y = B & \dots (II) \end{cases}$$

Efectuando: (I)+2(II), se tendrá:

$$3x = A+2B \Rightarrow x = \frac{1}{3}(A+2B) \dots (III)$$

Ahora hallemos la matriz A+2B:

$$A+2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \dots (*)$$

Reemplazando (*) en (III), tendremos:

$$\rightarrow x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rpta.: A

Resolución 3: Primero hallaremos la matriz $2B-3C$:

$$2B-3C = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

A continuación reconocemos que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz $(2B-3C)$, por lo tanto sí es posible efectuar la multiplicación entre ambas matrices. Dado que A tiene dos filas y $(2B-3C)$ presenta 2 columnas, concluiremos que la matriz $D=A \cdot (2B-3C)$, será de orden: 2×2 . Veamos:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$d_{11} = (1)(-4) + (-4)(-5) + (2)(7) \rightarrow d_{11} = 30$$

$$d_{12} = (1)(-2) + (-4)(9) + (2)(5) \rightarrow d_{12} = -28$$

$$d_{21} = (-1)(-4) + (4)(-5) + (-2)(7) \rightarrow d_{21} = -30$$

$$d_{22} = (-1)(-2) + (4)(9) + (-2)(5) \rightarrow d_{22} = 28$$

De este modo la matriz buscada será:

$$A \cdot (2B-3C) = \begin{bmatrix} 30 & -28 \\ -30 & 28 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\sum d_{ij} = 30 - 28 = 2$$

Rpta.: E

Resolución 4: Por condición se tiene $A=B$, es decir:

$$\begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la igualdad de matrices, se debe cumplir que:

$$x-3y = 2 \dots\dots\dots (I)$$

Asimismo se observará que:

$$x = 6-y \dots\dots\dots (II)$$

Resolviendo (I) y (II), obtenemos:

$$x = 5 \wedge y = 1$$

Por tal razón la matriz A será:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, hallaremos la matriz pedida $3A + 2C$

$$3A + 2C = 3 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas:

$$3A + 2C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Rpta.: E

Resolución 5:

Sea C la matriz que se obtiene al efectuar la multiplicación de matrices indicadas, es decir:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$C_{11} = (2)(7) + (9)(3) = 41$$

$$C_{12} = (2)(11) + (9)(10) = 112$$

$$C_{21} = (4)(7) + (15)(3) = 73$$

$$C_{22} = (4)(11) + (15)(10) = 194$$

Finalmente, la matriz buscada será:

$$C = \begin{bmatrix} 41 & 112 \\ 73 & 194 \end{bmatrix}$$

Rpta.: C

Resolución 6: Aplicando la propiedad de la transpuesta de una adición de matrices, se obtiene:

$$(A^T)^T + B^T + 2A - X = 0$$

y por la primera propiedad de la transpuesta tendremos:

$$A + B^T + 2A - X = 0$$

Reduciendo y transponiendo términos, se consigue:

$$X = 3A + B^T \dots\dots\dots(1)$$

A continuación calcularemos la matriz 3A:

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

Asimismo encontraremos la transpuesta de B:

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1), tendremos:

$$x = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando la suma de matrices nos queda:

$$x = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ Mayor elemento de $x = 11$

Rpta.: E

Resolución 7: Para la matriz

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$$

su forma desarrollada es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Por condición del problema cada uno de los elementos de la matriz deberá calcularse según la regla de correspondencia dada.

$$a_{ij} = \begin{cases} -3 & ; i+j < 4 \\ i-j & ; i+j \geq 4 \end{cases}$$

$$a_{11} = -3; \text{ pues: } 1+1 = 2 < 4$$

$$a_{12} = -3; \text{ pues: } 1+2 = 3 < 4$$

$$a_{13} = 1-3 = -2; \text{ pues: } 1+3 = 4 \geq 4$$

$$a_{21} = -3; \text{ pues: } 2+1 = 3 < 4$$

$$a_{22} = 2-2=0; \text{ pues: } 2+2 = 4 \geq 4$$

$$a_{23} = 2-3=-1; \text{ pues: } 2+3 = 5 \geq 4$$

Luego la matriz A será:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente la suma de todos sus elementos es:

$$\rightarrow (-3)+(-3)+(-2)+(-3)+(0)+(-1) = -12$$

Rpta.: D

Resolución 8: De acuerdo con la propiedad A y B serán conmutables si se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando cada multiplicación indicada se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2m-n & -3 \\ 3m+n & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+3 & -m+1 \\ 2n+15 & -n+5 \end{bmatrix}$$

Por la igualdad de matrices se debe cumplir que:

$$-3 = -m+1 \Rightarrow m=4$$

$$8 = -n+5 \Rightarrow n = -3$$

Finalmente, el valor pedido será:

$$m+n = (4)+(-3) = 1$$

Rpta.: A

Resolución 9:

Como M es una matriz triangular inferior, se debe cumplir que todos los elementos ubicados por encima de la diagonal principal, son iguales a cero. Por tal razón se puede establecer que:

$$1) a+6=0 \quad a=-6$$

$$2) b+9=0 \quad b=-9$$

$$3) a+b+15=0$$

Finalmente el valor pedido será:

$$a-b = -6 - (-9) = 3 \quad \rightarrow$$

Rpta.: B

Resolución 10:

Si A es una matriz diagonal, se cumplirá que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son iguales a cero. Esto significa que:

$$1) a-5=0 \Rightarrow a=5$$

$$2) b-2=0 \Rightarrow b=2$$

$$3) p-b=0 \Rightarrow p=b$$

$$4) m-a=0 \Rightarrow m=a$$

$$5) n-b=0 \Rightarrow n=b$$

Resolviendo encontramos que:

$$m = 5 \wedge n = 2 \wedge p = 2$$

Finalmente el valor pedido será:

$$m - n + p = 5 - 2 + 2 = 5$$

Rpta.: A

Resolución 11: En primer lugar determinaremos $A+B$.

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Efectuando la adición obtenemos:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (*)$$

De (*) se puede observar que:

$$A+B = I$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, se consigue:

$$(A+B)^2 = I^2$$

Finalmente debemos recordar que $I^2 = I$, por lo tanto:

$$(A+B)^2 = I$$

Rpta.: E

Resolución 12: Se sabe que una matriz es escalar si además es una matriz diagonal, por lo cual debe cumplirse que:

$$6 - r = 0 \Rightarrow r = 6$$

$$10 - s = 0 \Rightarrow s = 10$$

Asimismo una matriz escalar se caracteriza porque los elementos de su diagonal son iguales entre sí a un mismo número real diferente de cero.

Por lo tanto se puede establecer que:

$$\begin{aligned} r-4=s-8=t-9 \neq 0 &\Rightarrow 10-8=t-9 \\ &\Rightarrow t=11 \end{aligned}$$

Finalmente el valor pedido será:

$$r-s+t=6-10+11=7$$

Rpta.: D

Resolución 13: Nuestra estrategia consistirá en formar la potencia A^{40} a partir de A , así:

$$1) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

De este último resultado podemos observar que:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I$$

De esta última expresión reconocemos que:

$$A^3 = 6I$$

Elevando ambos miembros al exponente 13, se obtiene:

$$(A^3)^{13} = (6I)^{13}$$

Aplicando las propiedad para la potencia, se tendrá:

$$A^{39} = 6^{13} I^{13} = 6^{13} I \quad \dots\dots\dots (I)$$

Recordar que la matriz buscada es A^{40}

$$A^{40} = A \cdot A^{39} \quad \dots\dots\dots (II)$$

Reemplazando (I) en (II) se consigue:

$$A^{40} = A \cdot 6^{13} I = 6^{13} \underbrace{A \cdot I}_A$$

Aplicando propiedades tenemos:

$$A^{40} = 6^{13} A = 6^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente la suma pedida será:

$$\sum \text{elementos de } A^{40} = 6^{13} (1+2+3) = 6^{14}$$

Rpta.: B

Resolución 14:

Teniendo en cuenta la multiplicación de una matriz por un escalar, en la expresión dada podemos factorizar la matriz A, obteniéndose:

$$E = (1+2+3+\dots+n) \cdot A$$

Reconociendo la suma de los "n" primeros números enteros positivos:

$$E = \frac{n(n+1)}{2} \cdot A$$

Sustituyendo A por su equivalente matricial:

$$E = \frac{n(n+1)}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada, obtenemos:

$$E = \begin{bmatrix} -n(n+1) & 0 \\ 2n(n+1) & -n(n+1) \end{bmatrix}$$

Finalmente se observa que la suma de los elementos de la matriz E es igual a :

$$\sum \text{elementos} = -n(n+1) + 0 + 2n(n+1) - n(n+1)$$

$$\therefore \sum \text{elementos} = 0$$

Rpta.: A

Resolución 15: Nuestra estrategia consistirá en formar la potencia M^{1003} a partir de M .

$$M^2 = M \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada, tendremos:

$$M^2 = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix}$$

Extrayendo factor común α^2 , nos queda:

$$M^2 = -\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reconociendo a la matriz identidad, nos queda:

$$M^2 = -\alpha^2 \cdot I$$

Elevando a ambos miembros al exponente 501:

$$(M^2)^{501} = (-\alpha^2 \cdot I)^{501}$$

En base a las propiedades para la potencia, se tendrá:

$$M^{1002} = -\alpha^{1002} \cdot I^{501}$$

Aplicando la 2da propiedad de la matriz identidad:

$$M^{1002} = -\alpha^{1002} \cdot I \quad \dots\dots\dots(I)$$

la matriz buscada es:

$$M^{1003} = M \cdot M^{1002} \quad \dots\dots\dots(II)$$

Reemplazando (1) en (2) se consigue:

$$M^{1003} = M \cdot -\alpha^{1002} \cdot I$$

Agrupando convenientemente, tendremos:

$$M^{1003} = -\alpha^{1002} \cdot \underline{M \cdot I}$$

Aplicando la propiedad en el producto indicado, obtenemos:

$$M^{1003} = -\alpha^{1002} \cdot M$$

Sustituyendo M por su equivalente matricial:

$$M^{1003} = -\alpha^{1002} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Extrayendo factor común $-\alpha$ de la matriz, nos queda:

$$M^{1003} = -\alpha^{1002} \cdot -\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la matriz buscada será:

$$M^{1003} = \alpha^{1003} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rpta.: B

Resolución 16:

Si A es una matriz idempotente se debe cumplir que $A^2 = A$; de esto nuestra estrategia consistirá en multiplicar a la matriz A por sí misma, y luego proceder a una igualdad de matrices. Veamos:

Indicamos la multiplicación de matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 4+m & 2m+mn \\ 2+n & m+n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices, se cumple:

$$4+m = 2 \rightarrow m = -2$$

$$2+n = 1 \rightarrow n = -1$$

Finalmente, el valor pedido es:

$$n - m = 1$$

Rpta.: E

Resolución 17:

Por condición se plantea:

$$A = B + C \dots\dots\dots(I)$$

Tomando transpuesta a ambos miembros:

$$A^T = (B+C)^T$$

Aplicando propiedad de transpuesta:

$$A^T = B^T + C^T \quad \dots\dots\dots\text{(II)}$$

Por condición se sabe que B es simétrica, luego:

$$B = B^T \quad \dots\dots\dots\text{(III)}$$

Asimismo se sabe que C es antisimétrica, por tanto:

$$C = -C^T \quad \dots\dots\dots\text{(IV)}$$

luego, reemplazando (III) y (IV) en (I), se obtiene:

$$A = B^T - C^T \quad \dots\dots\dots\text{(V)}$$

Ahora efectuando la siguiente diferencia (II)-(V), se tendrá:

$$A^T - A = 2C^T$$

Tomando transpuesta a ambos miembros:

$$(A^T - A)^T = (2C^T)^T$$

Aplicando propiedad de transpuesta:

$$A - A^T = 2C$$

Despejando C, se obtiene:

$$C = \frac{1}{2} (A - A^T) \quad \dots\dots\dots\text{(VI)}$$

Del dato encontramos la transpuesta de A y planteamos:

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Efectuando la diferencia de matrices, nos queda:

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots\text{(VII)}$$

Finalmente, reemplazando (VII) en (VI) se obtiene:

$$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Rpta.: A

Resolución 18: Dado que todas las proposiciones contienen una cuestión teórica, será conveniente analizar cada una de ellas hasta encontrar a la proposición falsa, para ello será necesario determinar la matriz A^2 .

Halleemos $A^2 = A \cdot A$ de la siguiente forma:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Este resultado nos permite afirmar que:

$$A^2 = I \dots\dots\dots (I)$$

PROPOSICIÓN (A): Es verdadera

$$A^n = I, \forall n \text{ par } (n \in \mathbb{N})$$

Sea ' n ' un número natural par, tal que:

$$n = 2K, \text{ luego: } A^n = A^{2K} = (A^2)^K \dots\dots\dots (II)$$

De (I) en (II) se podrá establecer que:

$$A^n = (I)^K \rightarrow A^n = I$$

En consecuencia, la proposición A es verdadera.

PROPOSICIÓN (B): Es verdadera

$$A^n = A, \forall n \text{ impar } (n \in \mathbb{N})$$

Sea ' n ' un número natural impar, tal que:

$$n = 2K + 1, \text{ entonces } A^n = A^{2K+1} = A^{2K} \cdot A$$

Acomodando, tendremos:

$$A^n = (A^2)^K \cdot A \dots\dots\dots (III)$$

Reemplazando (I) en (III) se podrá establecer que:

$$A^n = (I)^K \cdot A \rightarrow I \cdot A \rightarrow A^n = A$$

PROPOSICIÓN (C): Es verdadera

$$\det(A^n) \neq 0; \forall n \in \mathbb{N}$$

Según la propiedad de los determinantes, se tiene:

$$\det(A^n) = \{\det(A)\}^n$$

Ahora hallemos $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (-1)(-1) = -1$$

Siendo $n \in \mathbb{N}$, diremos que:

$$\det(A^n) = \{\det(A)\}^n = \{-1\}^n \neq 0$$

PROPOSICIÓN (D): Es falsa

$$\det(I + A^n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Aquí se presentan 2 casos:

1°CASO: Si 'n' es un número par, según lo analizado en la proposición A, se sabe que $A^n = I$

Luego:

$$\det(I + A^n) = \det(2I) = 4$$

De esto se puede concluir que:

$$\det(I + A^n) \neq 0 \dots\dots\dots(\alpha)$$

2°CASO: Si 'n' es un número impar, según lo analizado en la proposición B se sabe que $A^n = A$

Luego:

$$\det(I + A^n) = \det(I + A) \dots\dots\dots(\beta)$$

Tener en cuenta que:

$$I + A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí se deduce que:

$$\det(I + A) = (1)(1) - (-1)(-1) = 0$$

Reemplazando en (β) se tendrá:

$$\det(I + A^n) = \det(I + A) = 0 \dots\dots\dots(\theta)$$

Finalmente de (α) y (θ) se establece que:

$$\det(I + A) \text{ no siempre es cero.}$$

PROPOSICIÓN (E): Es verdadera

$$\det(I - A^n) = 0; \forall n \in \mathbb{N}$$

Aquí también se presentan 2 casos, pero en ambos casos se obtiene siempre que:

$$\det(I - A^n) = 0$$

∴ En consecuencia la proposición D es la única falsa.

Rpta.: D

Resolución 19: La matriz de cofactores de M se denota así:

cofact (M) y es tal que:

$$\text{cofact (M)} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$$

Donde:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -21$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 15$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

Es decir:

$$\text{cofact}(M) = \begin{vmatrix} 35 & -21 & -14 \\ 15 & -2 & -8 \\ -20 & 12 & 13 \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\sum \text{elementos} = 10$$

Rpta.: B

Resolución 20:

De la ecuación dada su solución es:

$$x = A^{-1} \cdot B \quad \dots\dots\dots(1)$$

Halleemos $|A|$ a partir del dato:

$$|A| = (1)(1) - (2)(1) = -1 \quad \dots\dots\dots(*)$$

Ahora determinaremos

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \quad \dots\dots\dots(**)(*)$$

Utilizando la regla práctica y reemplazando (*) en (**):

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación indicada:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1), se tendrá:

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ahora es necesario encontrar la transpuesta de x :

$$x^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A continuación calculamos:

$$x^T \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos la traza de esta matriz:

$$\text{TRAZ}(x^T \cdot B) = 1$$

Rpta.: B

Resolución 21: El determinante dado está referido a una matriz de 2° orden y ésta se desarrolla así:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2) - (2x+1)(x+1)$$

Por condición del problema:

$$(2x-1)(4x+2) - (2x+1)(x+1) = 0$$

Efectuando en el primer miembro, se consigue:

$$(8x^2 - 2) - (2x^2 + 3x + 1) = 0$$

Quitando los paréntesis, reduciendo y simplificando:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$x_1 = -\frac{1}{2} ; x_2 = 1$$

Rpta.: A

Resolución 22: Sea la matriz de 3er orden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I)$$

Haciendo el intercambio de la 1ra fila por la 3ra:

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(II)$$

Por condición se sabe que si multiplicamos por 3 a la 1ra fila y por 2 a la 3ra fila, obtenemos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3(a_{31}) & 3(a_{32}) & 3(a_{33}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2(a_{11}) & 2(a_{12}) & 2(a_{13}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III)$$

Ahora, al calcular el determinante de la matriz A_1 , extraemos factor común 3 y 2, obteniéndose:

$$\det(A_1) = (3.2) \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Ahora, intercambiando la 1ra y la 3ra fila, obtenemos:

$$\det(A_1) = -(3 \cdot 2) \det(A) \dots\dots\dots (*)$$

Reemplazando el dato en (*):

$$66 = -6 \det(A)$$

Simplificando logramos determinar que:

$$\det(A) = -11 \dots\dots\dots (1)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \dots\dots\dots (2)$$

Finalmente, reemplazando (1) en (2):

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{11}$$

Rpta.: B

Resolución 23:

Sea esta la matriz para A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

Luego, su determinante será:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Por condición se debe cumplir que:

$$B = A^2 = A \cdot A \dots\dots\dots (2)$$

Reemplazando (1) en (2) y efectuando la multiplicación de matrices, se obtendrá:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12} \cdot a_{21} & a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} \\ \underbrace{a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21}}_{b_{21}} & a_{21} \cdot a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Por condición b_{21} , es decir:

$$a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21} = 0$$

Sacando factor común a_{21} , tendremos:

$$a_{21} (a_{11} + a_{22}) = 0$$

Por condición $a_{21} \neq 0$, luego se deduce que:

$$a_{11} + a_{22} = 0 \quad \dots\dots\dots (*)$$

Asimismo se pide:

$$N = \text{TRAZ}(B) + 2\det(A)$$

Aplicando la definición de traza para B y de determinante para A, tendremos:

$$N = (a_{11}^2 + a_{12} \cdot a_{21} + a_{21} \cdot a_{12} + a_{22}^2) + 2(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})$$

Reduciendo, se obtiene:

$$N = a_{11}^2 + 2a_{11} \cdot a_{22} + a_{22}^2$$

$$N = (a_{11} + a_{22})^2 \quad \dots\dots\dots (**)$$

Finalmente, reemplazamos (*) en (**) :

$$N = 0$$

Rpta.: B

Resolución 24

El determinante no se altera si a la 1ra fila le restamos la segunda, luego nos queda:

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0$$

A continuación escogemos la primera fila para desarrollar el determinante.

$$a \begin{vmatrix} b+x & x \\ x & c+x \end{vmatrix} - (-b) \begin{vmatrix} x & x \\ x & c+x \end{vmatrix} = 0$$

Efectuando se tendrá:

$$a(bc + bx + cx + x^2 - x^2) + b(cx + x^2 - x^2) = 0$$

$$a(bc + bx + cx) + b(cx) = 0$$

$$abc + abx + acx + bcx = 0$$

Transponiendo términos y factorizando x, se consigue:

$$(ab + ac + bc)x = -abc$$

Finalmente al despejar se obtiene:

$$x = -\frac{abc}{ab+ac+bc}$$

Rpta.: B

Resolución 25: Se pide la suma de los elementos de la expresión matricial $f(A)$, la cual se define así:

$$f(A) = A^2 - 2A - I \dots\dots\dots (*)$$

Primero hallemos A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego en (*) se tendrá:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación por 2:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Restando las dos primeras matrices:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente diremos que:

$$\sum \text{elementos de } f(A) = 0$$

Rpta.: C

Resolución 26: Hallemos $\det(H)$

$$\det(H) = \begin{vmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 3x$$

Por condición $\det(H) = 4$, luego (*) quedará

$$x^2 + 3x = 4$$

Transponiendo términos, se establece que:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene:

$$x_1 = 1 \vee x_2 = -4$$

Luego:

$$\text{Si } x = 1 : H = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H^2 = H \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } x = -4 : H = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H^2 = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -268 & -51 \\ 68 & -13 \end{bmatrix}$$

Rpta.: B

Resolución 27: La matriz dada se podrá escribir así:

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I)$$

Ahora, analizando cuidadosamente algunas potencia de la matriz A se tendrá:

$$A^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^2} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(II)$$

Ahora encontramos:

$$A^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^3} \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III)$$

Asimismo determinamos:

$$A^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^4} \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(IV)$$

$$\text{De (I): } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 3^0 \\ 3^0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{De (II): } A^2 = \frac{1}{3^2} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^2} \begin{bmatrix} 3^1+2 & 3^1+3^0 \\ 3^1+3^0 & 3^1+2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{De (III): } A^3 = \frac{1}{3^3} \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^3} \begin{bmatrix} 3^2+3^1+2 & 3^2+3^1+3^0 \\ 3^2+3^1+3^0 & 3^2+3^1+2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{De (IV): } A^4 = \frac{1}{3^4} \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^4} \begin{bmatrix} 3^3+3^2+3^1+2 & 3^3+3^2+3^1+3^0 \\ 3^3+3^2+3^1+3^0 & 3^3+3^2+3^1+2 \end{bmatrix}$$

Por inducción:

$$A^n = \frac{1}{3^n} \begin{bmatrix} 3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\dots+3^1+2 & 3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\dots+3^1+3^0 \\ 3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\dots+3^1+3^0 & 3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\dots+3^1+2 \end{bmatrix}$$

Donde la suma de los elementos de su diagonal principal está dada así:

$$\Sigma = \frac{2}{3^n} (3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}+\dots+3^1+2)$$

Introduciendo el denominador:

$$\Sigma = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} \right)$$

Como 'n' es muy grande, la suma pedida será:

$$\Sigma = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right)$$

Debemos recordar la siguiente suma notable

$$x+x^2+x^3+x^4+\dots = \frac{x}{1-x} \quad \forall 0 < x < 1$$

Finalmente, la suma pedida es:

$$\Sigma = 2 \left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

Rpta.: B

Resolución 28: Por condición del problema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación de matrices del primer miembro, se consigue:

$$\begin{bmatrix} u & v-x & w-y+z \\ 0 & \frac{x}{2} & \frac{y}{2}-z \\ 0 & 0 & \frac{z}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices:

$$1) u=1$$

$$2) v-x=0 \Rightarrow v=x$$

$$3) w-y+z=0 \Rightarrow w=y-z$$

$$4) \frac{x}{2}=1 \Rightarrow x=2$$

$$5) \frac{y}{2}-z=0 \Rightarrow y=2z$$

$$6) \frac{z}{4}=1 \Rightarrow z=4$$

Resolviendo estas ecuaciones, se tendrá:

$$u=1 ; v=x=2 ; y=8 ; z=4 \wedge w=4$$

Finalmente:

$$u+v+w+x+y+z=21$$

Rpta.: A

Resolución 29: Debemos recordar que:

$$i^{4m}=1 \wedge w^{3m}=1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Ahora hallaremos la matriz A^{4K} .

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (*)$$

Podemos reconocer de (*) que $A^2 = -I$

Luego, elevando ambos miembros al exponente $2K$ se obtiene:

$$A^{4K} = I \dots\dots\dots (1)$$

Ahora hallaremos la matriz B^{3K} .

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} w^2 & 0 \\ 0 & w^4 \end{bmatrix}$$

Asimismo reconocemos que:

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} w^3 & 0 \\ 0 & w^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(**)$$

De (**) podemos observar que:

$$B^3 = I$$

Luego, elevando a ambos miembros al exponente K , se obtiene:

$$B^{3K} = I \dots\dots\dots (2)$$

Sumando (1) y (2) se consigue:

$$A^{4K} + B^{3K} = I + I = 2I \dots\dots\dots (3)$$

Por condición, la matriz C se define así:

$$C = \sum_{K=1}^{40} (A^{4K} + B^{3K}) \dots\dots\dots (4)$$

Reemplazando (3) en (4) se tendrá:

$$C = \sum_{K=1}^{40} (2I) = \underbrace{(2I) + (2I) + (2I) + \dots + (2I)}_{40 \text{ veces}}$$

Reduciendo:

$$C = 40 (2I) = 80I$$

$$C = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$$

Hallaremos la matriz C^{-1} , según la regla práctica:

$$C^{-1} = \frac{1}{(80)^2} \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{80} & 0 \\ 0 & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

Finalmente la traza de C^{-1} será:

$$\text{TRAZ } (C^{-1}) = \frac{1}{80} + \frac{1}{80} = \frac{1}{40}$$

Rpta.: E

Resolución 30:

Debemos reconocer que la matriz C que se obtiene de multiplicar A por B , poseerá 23 filas y 41 columnas. Asimismo debemos observar que el elemento C_{34} , es el producto de la 3ra fila de la matriz A por la 4ta columna de la matriz B , por esta razón se puede establecer que:

$$C_{34} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \end{bmatrix} = a_{31} \cdot b_{14} + a_{32} \cdot b_{24} \dots (*)$$

Por condición se sabe que:

$$a_{ij} = i + j \rightarrow a_{31} = 4 \wedge a_{32} = 5$$

De igual modo se puede decir que:

$$b_{ij} = 2i + 3j \rightarrow b_{14} = 4 \wedge b_{24} = 16$$

Finalmente reemplazando en (*) se obtiene:

$$C_{34} = (4)(14) + (5)(16) = 136$$

Rpta.: A

Resolución 31:

Para encontrar el valor de la expresión $b_{11} + b_{12} + b_{13}$, será necesario encontrar a la matriz B . Sabiendo que B es una matriz simétrica.

$$B = \frac{1}{2} (A + A^T) \dots\dots\dots (I)$$

Del dato encontraremos A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sumando A y A^T se obtiene:

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones, nos queda:

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I) se obtiene:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente se tendrá:

$$b_{11} + b_{12} + b_{13} = 1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

Rpta.: D

Resolución 32: Hallaremos A^n por inducción:

Calculemos A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos A^3 :

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

Asimismo calculemos A^4 :

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

En general:

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I)$$

Multiplicando por B^{-1} a la condición:

$$A^n \cdot x \cdot \underline{B \cdot B^{-1}} = C \cdot B^{-1}$$

Sustituyendo lo indicado por la matriz identidad I:

$$x^n \cdot x \cdot I = C \cdot B^{-1}$$

Empleando la 1ra propiedad de la matriz identidad:

$$A \cdot x^n = C \cdot B^{-1}$$

Multiplicando por A^{-n} a ambos miembros:

$$\underline{A^{-n} \cdot A^n} \cdot x = A^{-n} \cdot (C \cdot B^{-1})$$

Sustituyendo lo indicado por la matriz identidad I:

$$I \cdot x = A^{-n} \cdot (C \cdot B^{-1})$$

Empleando la 1ra propiedad de la matriz identidad:

$$x = A^{-n} (C \cdot B^{-1}) \dots\dots\dots(II)$$

Al hallar la matriz de $B^{-1} \wedge A^{-n}$, según la regla práctica:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2} & -a^{-1} \end{bmatrix} \wedge A^{-n} = \begin{bmatrix} a^{-n} & -n \cdot a^{-n-1} \\ 0 & a^{-n} \end{bmatrix} \dots\dots(III)$$

Ahora hallamos la matriz $C \cdot B^{-1}$

$$C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} (n+1)a^{n+4} & a^{n+5} \\ a^{n+5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2} & -a^{-1} \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación:

$$C \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} n \cdot a^{n+3} & -a^{n+4} \\ a^{n+4} & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(IV)$$

Finalmente, reemplazando (III) y (IV) en (II) se consigue:

$$x = \begin{bmatrix} a^{-n} & -n \cdot a^{-n-1} \\ 0 & a^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \cdot a^{n+3} & -a^{n+4} \\ a^{n+4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} 0 & -a^4 \\ a^4 & 0 \end{bmatrix}$$

Rpta.: E

Resolución 33: Sea T el equivalente pedido, entonces nuestra estrategia para encontrar dicha equivalente consistirá en calcular el determinante mostrado como radicando, empleando para ellos las propiedades expuestas:

$$\begin{vmatrix} (a-b-c) & 2a & 2a \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$$

Sumando la 2da y la 3ra fila a la 1ra:

$$\begin{vmatrix} (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Extrayendo de la 1ra fila el factor $(a+b+c)$.

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & (b-c-a) & 2b \\ 2c & 2c & (c-a-b) \end{vmatrix}$$

Restando la 1ra columna de las otras dos.

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$

Aquí encontramos el determinante según el criterio de los cofactores:

$$(a+b+c) \left\{ (-a-b-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2b & -a-b-c \end{vmatrix} \right\}$$

Desarrollando, nos queda:

$$(a+b+c) \{ (-a-b-c)(-a-b-c) \} = (a+b+c)^3$$

Finalmente el equivalente será:

$$T = \sqrt[3]{(a+b+c)^3} = a+b+c$$

Rpta.: B

Resolución 34: De acuerdo con la definición de matriz inversa, se sabe que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

Tomando determinante a ambos miembros:

$$|A^{-1}| = \left| \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A) \right|$$

Por propiedad de determinantes, obtenemos:

$$|A|^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot |\text{Adj}(A)|$$

Despejando, encontramos que:

$$|\text{Adj}(A)| = |A|^2$$

Reemplazando datos, deducimos que:

$$|\text{Adj}(A)| = (-4)^2 = 16 \quad \dots\dots\dots (*)$$

Sustituyendo el dato de la matriz para $\text{Adj}(A)$ en (*):

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & K \end{vmatrix} = 16$$

$$8(-2K - 30 - 5K) + 4(-20 + 54 + 9K) = 16$$

$$2(-7K - 30) + 9K + 34 = 4$$

$$-14K - 60 + 9K + 34 = 4$$

$$-5K - 26 = 4$$

$$-5K = 30$$

$$K = -6$$

Rpta.: D

Resolución 35: Por tratarse de una matriz de un orden mayor que 3, restaremos la 1ra fila a la 2da, 3ra, 4ta y así sucesivamente...; de este modo el determinante mostrado en el 1er miembro de la igualdad dada se transforma en:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (1-x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \{(n-2)-x\} \end{vmatrix}$$

Luego, por ser un determinante para una matriz triangular superior, su valor se determinará así.

$$(1)(-x)(1-x)(2-x)\dots\{(n-2)-x\}$$

Por condición se sabe que:

$$(1)(-x)(1-x)(2-x)\dots\{(n-2)-x\} = 0$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas:

$$x(x-1)(x-2)\dots\{x-(n-2)\} = 0$$

En consecuencia, las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 0 ; x_2 = 1 ; x_3 = 2 ; \dots x_{n-1} = n-2$$

Finalmente:

$$\sum \text{de raíces} = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 36:

Dato:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow -2(1)$$

De donde tenemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow -2(2)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow -2(3)$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow -2(4)$$

...

De acuerdo a la ley de formación:

$$\therefore A^{215} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -430 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rpta.: B

Resolución 37: Construimos, según la regla dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum \text{elem} = 2(3^2)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum \text{elem} = 2(3^3)$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum \text{elem} = 2(3^4)$$

De acuerdo a la ley de formación:

$$\sum \text{elem} (A^n) = 2(3^n)$$

Rpta.: C

Resolución 38: Contruyendo A, según la regla:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

De donde:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} n & n & n & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} n^2 & n^2 & n^2 & \dots & n^2 \\ n^2 & n^2 & n^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & n^2 & n^2 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} n^3 & n^3 & n^3 & \dots & n^3 \\ n^3 & n^3 & n^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^3 & n^3 & n^3 & \dots & n^3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la ley de formación, se tiene:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{bmatrix} n^{n-1} & n^{n-1} & n^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ n^{n-1} & n^{n-1} & n^{n-1} & \dots & n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^{n-1} & n^{n-1} & n^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$\sum \text{elem. } A^n = \underbrace{n^{n-1} + n^{n-1} + n^{n-1} + \dots + n^{n-1}}_{(n^2) \text{ sumandos}}$$

$$\sum \text{elem. } (A^n) = n^{n-1} \cdot (n^2)$$

$$\therefore \sum \text{elem. } A^n = n^{n+1}$$

Rpta.: B

Resolución 39: Dato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que:

$$A^5 = 0 \text{ (matriz nula)}$$

∴ El n pedido es 5.

Rpta.: C

Resolución 40: Si:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{55} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

En $B = P^{-1}AP$, se tiene:

$$B = -\frac{1}{55} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -59 & -36 \\ -27 & -23 \end{bmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{55} \begin{bmatrix} -275 & * \\ * & -55 \end{bmatrix}$$

Observa que:

$$\text{Traz}(B) = -\frac{1}{55}(-330)$$

$$\therefore \text{Traz}(B) = 6$$

Rpta.: E

Resolución 41: Siendo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observa que:

$$B^3 = -I$$

De donde:

$$B^{33} = -I \rightarrow B^{34} = -I \cdot B = -B$$

$$B^9 = -I$$

Luego:

$$(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1} = (-B + 2I + I)^{-1}$$

$$(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1} = (-B + 3I)^{-1}$$

$$(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

∴ Σ elementos de: $(B^{34} - 2B^9 + I)^{-1}$

$$\text{es igual a: } \frac{1}{7}(5) = \frac{5}{7}$$

Rpta.: C

Resolución 42: Sea:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hallemos } A = M^{16} - N^{15} - P^{15}$$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = 2M$$

De donde:

$$M^{16} = 2^8 \boxed{M^8} = 2^8 \left[2^4 \boxed{M^4} \right]$$

$$M^{16} = 2^{12} \left[2^2 \boxed{M^2} \right] = 2^{14} [2M]$$

$$M^{16} = 2^{15} M$$

$$N^2 = N \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (Matriz nula)}$$

$$\text{Con esto } N^{15} = 0$$

$$P = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \Rightarrow P = 2I$$

De donde:

$$P^{15} = 2^{15} I^{15} = 2^{15} I$$

Luego:

$$\begin{aligned} A &= 2^{15} M - 2^{15} I \\ &= 2^{15} (M - I) \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\underbrace{M - I}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2^{15} \\ 2^{15} & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -2^{15} \\ -2^{15} & 0 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2^{15} \\ 2^{15} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2^{30}} \begin{bmatrix} 0 & -2^{15} \\ -2^{15} & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\alpha + \beta + \gamma + u = -2^{-30} (-2 \cdot 2^{15})$$

$$\alpha + \beta + \gamma + u = 2^{-14}$$

Rpta.: A**Resolución 43:** Si:

$$(A+I)^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Asimismo:

$$3(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 15 & 3 \end{bmatrix}$$

De:

$$(AXA^{-1})^t = 3(A-I)$$

$$AXA^{-1} = (3(A-I))^t$$

$$X = A^{-1} (3(A-I))^t \cdot A$$

Reemplazando equivalentes:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -24 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 44 & 17 \\ -119 & -47 \end{bmatrix}}$$

$$x = \begin{bmatrix} -44 & -17 \\ 119 & 47 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Traz}(x) = -44 + 47 = 3$$

Rpta.: E

Resolución 44:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De:

$$(A \cdot X^{-1}B)^t = AB$$

$$A \cdot X^{-1}B = (AB)^t$$

$$X^{-1} = A^{-1}(AB)^t B^{-1}$$

$$X = B \left\{ (AB)^t \right\}^{-1} A \dots (\alpha)$$

Calculemos la inversa de $(AB)^t$ por matriz ampliada:

Observar que:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora:

$$\left[(AB)^t : I \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 - F_3 \\ F_2 - 3F_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 + F_3 \\ F_2 + F_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{F_3 + 3F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} F_1 + 3F_2 \\ F_2 - 2F_3 \\ -1F_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Luego, en (α):

$$x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} -12 & 9 & -2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\text{Traz}(x) = 7 + 1 + 3$$

$$\therefore \text{Traz}(x) = 11$$

Rpta.: C

Resolución 45: Nos piden:

$$\text{Traz}(A - 3I)^{-1} = ?$$

De:

$$A^2 - 5A + 5I = 0$$

$$A^2 - 5A + 6I = I$$

$$(A - 3I)(A - 2I) = I$$

Por definición de matriz inversa:

$$(A - 3I)^{-1} = A - 2I$$

Tomando TRAZA:

$$\text{Traz}(I) = 3$$

$$\text{Traz}(A - 3I)^{-1} = 15 - 6$$

$$\text{Traz}(A - 3I)^{-1} = 9$$

Rpta.: C

Resolución 46: Si A es no singular $\Rightarrow |A| \neq 0$

De:

$$A^3 = 2I \Rightarrow A^3 - I = I$$

Pero sabemos que:

$$I^3 = I$$

Ahora tenemos:

$$\underbrace{A^3 - I^3}_{=I} = I$$

$$(A - I)(A^2 + AI + I^2) = I$$

$$(A - I)(A^2 + A + I) = I$$

Por definición de matriz inversa:

$$(A^2 + A + I)^{-1} = A - I$$

Rpta.: B

Resolución 47: Dato:

$$B - A = I$$

De:

$$A(XB + B^{-1})B = BA(A^{-1}B^{-1} + A^{-1})$$

$$AXB + \underbrace{AB^{-1}B}_I = B \underbrace{A A^{-1}}_I (B^{-1} + I)$$

$$AXB^2 + A = B(B^{-1} + I)$$

$$AXB^2 + A = I + B$$

$$AXB^2 = I + \underbrace{(B - A)}_{I \text{ (Dato)}}$$

$$AXB^2 = 2I$$

$$\underbrace{A^{-1}A} \underbrace{X B^2} \cdot B^{-2} = A^{-1}(2I)B^{-2}$$

$$I \quad X \quad I = 2A^{-1}IB^{-2}$$

$$\therefore X = 2A^{-1}B^{-2}$$

Rpta.: D

Resolución 48:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} 10 \Rightarrow ad - bc = 10$$

Nos piden:

$$E = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{vmatrix}$$

$$E = (a+b)(c+d) - (c+d)(a-b)$$

$$E = ac - ad + bc - bd - ac + ac + bc - ad + bd$$

$$E = -2ad + 2bc$$

$$E = -2(\underbrace{ad - bc}_{10})$$

$$E = -20$$

Rpta.: C**Resolución 49:**

$$P(x) = |A| = \begin{vmatrix} a^x + 2b^x & -c^x \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Aquí:

$$P(1) = \begin{vmatrix} a+2b & -c \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{condición})$$

$$2(a+2b) + 4c = 0$$

$$a + 2b + 2c = 0$$

Por equivalencia condicional:

$$a^3 + (2b)^3 + (2c)^3 = 3(a)(2b)(2c)$$

$$a^3 + 8b^3 + 8c^3 = 12abc$$

De donde:

$$\frac{a^3 + 8b^3 + 8c^3}{abc} = 12$$

Luego:

$$E = \frac{5}{6}(12)$$

$$E = 10$$

Rpta.: E

Resolución 50:

$$E = |A|A^2 \cdot |A^3|; |A| = 2$$

Transformemos aplicando propiedades:

$$E = |2A^2||A|^3 = 2^4 |A^2| |A|^3$$

$$E = 2^4 |A|^2 |A|^3 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^3$$

$$E = 2^9$$

Rpta.: A

Resolución 51: Condición:

$$\begin{vmatrix} 27x^3 & 3 \\ 9x & 6 \end{vmatrix} = 27$$

$$27x^2 \cdot 6 - 27x = 27$$

$$6x^2 - x = 1$$

$$6x^2 - 1 = x$$

Al dividir por x:

$$6x - \frac{1}{x} = 1$$

Al cuadrado:

$$36x^2 - 2(6x)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$36x^2 + \frac{1}{x^2} = 13$$

Rpta.: B

Resolución 52: Transformemos aplicando propiedades:

$$\left| A^{-1} \left| \frac{2}{|A|} A^T \right| \right| = \left| A^{-1} \left(\frac{2}{|A|} \right)^n |A^T| \right|$$

$$\left| A^{-1} \frac{2^n}{|A|^n} \cdot |A| \right| = \left| A^{-1} \cdot \frac{2^n}{|A|^{n-1}} \right|$$

$$\left[\frac{2^n}{|A|^{n-1}} \right]^n |A^{-1}| = \frac{2^{n^2}}{|A|^{n^2-n}} \cdot |A|^{-1}$$

$$\therefore 2^{n^2} \cdot |A|^{-n^2+n-1}$$

Rpta.: E

Resolución 53: Dato:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

Observar que:

$$|B| = 3abc - c^3 - a^3 - b^3$$

$$|A| = -2abc|B|$$

Luego:

$$T = -\frac{2abc|B|}{abc|B|}$$

$$T = -2$$

Rpta.: C

Resolución 54: Si los elementos de una fila o columna de un determinante son la adición indicada de varios sumandos, el determinante se puede descomponer en tanto determinantes como sumandos tenga la adición indicada.

Apliquemos en el 1er miembro, respecto a la primera columna.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ q & q+r & r+p \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

Respecto a la 2da columna de los determinantes obtenidos:

$$= \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ p & q & r+p \\ x & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c+a \\ p & r & r+p \\ x & z & z+x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b & b & c+a \\ q & q & r+p \\ y & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ q & r & r+p \\ y & z & z+x \end{vmatrix}$$

Respecto a la 3ra columna:

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a \\ p & q & p \\ x & y & x \end{vmatrix}}_0 + \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & c \\ p & r & r \\ x & z & z \end{vmatrix}}_0$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & a \\ p & r & p \\ x & z & x \end{vmatrix}}_0 + \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & c \\ q & r & r \\ y & z & z \end{vmatrix}}_0 + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Identificando con el segundo miembro:

$$\therefore K = 2$$

Rpta.: E

Resolución 55: Transformemos la segunda matriz:

$$M = \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 4 & \ln 8 \\ \ln 8 & \ln 256 & \ln 512 \\ \ln 4 & \ln 16 & \ln 64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ln 2 & -\ln 4 & -\ln 16 \\ -\ln 4 & -\ln 256 & -\ln 1024 \\ -\ln 8 & -\ln 32 & -\ln 128 \end{bmatrix}$$

Sumemos las matrices y apliquemos la propiedad de logaritmos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ln\left(\frac{8}{16}\right) \\ \ln\left(\frac{8}{4}\right) & 0 & \ln\left(\frac{512}{1024}\right) \\ \ln\left(\frac{4}{8}\right) & \ln\left(\frac{16}{32}\right) & \ln\left(\frac{64}{128}\right) \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\ln 2 \\ \ln 2 & 0 & -\ln 2 \\ -\ln 2 & -\ln 2 & -\ln 2 \end{bmatrix}$$

De aquí:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\ln 2 \\ \ln 2 & 0 & -\ln 2 \\ -\ln 2 & -\ln 2 & -\ln 2 \end{vmatrix}$$

$$|M| = (\ln 2)^3$$

$$|M| = \ln^3 \cdot 2$$

Rpta.: D

Resolución 56: La matriz es de Vandermonde:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = (c-b)(c-a)(b-a)$$

o también (cambiando de signo):

$$|A| = (b-c)(c-a)(a-b)$$

Rpta.: C

Resolución 57:

$$M = \{A \mid |A| = 0\}$$

Observación:

$$|A| = \begin{vmatrix} 70 & 72 & z \\ 105 & 108 & z+3 \\ 140 & 144 & z-3 \end{vmatrix}$$

“Factorizamos” 35 y 36 de la 1ra y 2da columna respectivamente:

$$|A| = (35)(36) \begin{vmatrix} 2 & 2 & z \\ 3 & 3 & z+3 \\ 4 & 4 & z-3 \end{vmatrix}$$

Este determinante
siempre vale 0.

$|A| = 0$ no depende de los valores de z . Por cada valor de z , existirá una matriz A tal que $|A| = 0$, y como z puede tomar infinitos valores, entonces existirán infinitas matrices A .

$\therefore M$ es un conjunto infinito.

Rpta.: E

Resolución 58:

Construimos la matriz A según la regla dada y tomando determinante, tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_4 - F_3 ; F_3 - F_2 ; F_2 - F_1 :$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Desarrollemos respecto a C_4 :

$$|A| = (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -4(8+5) - 3(8+7)$$

$$|A| = -4(13) - 3(15)$$

$$\therefore |A| = -97$$

Rpta.: C

Resolución 59:

$$E = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$C_3 - C_1 ; C_4 - C_2 :$$

$$E = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$F_3 + F_1 ; F_4 + 2F_1 :$$

$$E = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 11 & 0 & 0 \\ 15 & 14 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = -(-1) \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 8 & 11 & 0 \\ 15 & 14 & -4 \end{vmatrix}$$

$$E = -176 + 224$$

$$E = 48$$

Rpta.: D

Resolución 60: Hallemos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & a \end{vmatrix}$$

$C_2 + C_4:$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5+a & 3 & a \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1) \begin{vmatrix} a & 2a & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5+a & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = - (6a + 15 + 3a + 6a - 18 - 5a - a^2 - 6a)$$

$$|A| = a^2 - 4a + 3$$

$$|A| = (a-1)(a-3)$$

*Observar que si: $|A| > 0$

$$\Rightarrow (a-1)(a-3) > 0$$

De donde:

$$a < 1 \vee a > 3$$

Observamos: $a = 4; 5; 6 \dots$

El enunciado I es verdadero. (V)

$$\begin{aligned} \text{*Observar que } |A| &= 0 \\ \Rightarrow (a-1)(a-3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De donde:} \\ a = 1 \vee a = 3 \end{aligned}$$

Observamos que "a" no es único.

El enunciado II es falso. (F)

$$\begin{aligned} \text{*Para que: } |A| < 0 \\ \Rightarrow (a-1)(a-3) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De donde:} \\ 1 < a < 3 \end{aligned}$$

Observamos que sólo para $a = 2 \in \mathbb{N}$, se verifica que: $|A| < 0$

El enunciado III es verdadero. (V)

$\therefore$ Combinación correcta = VFV

Rpta.: A

Resolución 61: Condición:

$$B = 3A^2; |B| = ?$$

De donde:

$$|B| = |3A^2|$$

Por propiedad:

$$|B| = 3^4 |A^2|$$

$$|B| = 81 |A^2|$$

De A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos respecto a $\bar{C}_4$:

$$|A| = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)(6) + (4)(6-5)$$

$$|A| = -2$$

$$|B| = 81 (-2)^2$$

$$\therefore |B| = 324$$

Rpta.: C

Resolución 62: Sea:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$F_4 - F_3 ; F_3 - F_2 ; F_2 - F_1 :$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$F_4 - F_3 ; F_3 - F_2 :$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$F_4 - F_3:$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$E = 1$$

Rpta.: B

Resolución 63: Sea:

$$E = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Sumamos a C_1 todas las demás columnas y luego "factorizamos".

$$E = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 16 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 16 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 16 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 16 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Restamos F_1 a todas las demás filas:

$$E = 16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16(1)$$

$$E = 16$$

Rpta.: D

Resolución 64: Condición:

$$AB + AB^T = 8I$$

$$A(B + B^T) = 8I \dots\dots\dots(1)$$

Al construir la matriz B tenemos:

$$B = 2I \rightarrow B^T = 2I$$

De donde:

$$B + B^T = 4I$$

Ahora en (1) se tendrá:

$$A \cdot 4I = 8I \leftrightarrow 4A \cdot I = 8I$$

$$A = 2I \rightarrow |A| = 2^n, |I|$$

$$\therefore |A| = 2^n$$

Rpta.: B**Resolución 65:** Construimos A según regla y le tomamos determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+m & x & x & \dots & x \\ x & x+m & x & \dots & x \\ x & x & x+m & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+m \end{vmatrix}$$

Sumamos a C_1 todas las demás columnas y luego factorizamos:

$$|A| = \begin{vmatrix} nx+m & x & x & \dots & x \\ nx+m & x+m & x & \dots & x \\ nx+m & x & x+m & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nx+m & x & x & \dots & x+m \end{vmatrix}$$

$$= (nx+m) \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ 1 & x+m & x & \dots & x \\ 1 & x & x+m & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & x+m \end{vmatrix}$$

Si la columna 1 multiplicamos por x y lo restamos a todas las demás columnas, obtenemos:

$$|A| = (nx+m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & m & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & m \end{vmatrix}$$

$$|A| = (nx+m) (m \cdot m \cdot m \dots m)$$

$$|A| = (nx+m) m^{n-1}$$

Rpta.: E

Resolución 66: Por ser M una matriz simétrica, según la propiedad se plantea:

$$a = 2 \wedge a+b = 2 \wedge c = 1$$

$$a = 2 \wedge b = 0 \wedge c = 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

Rpta.: D

Resolución 67: La ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & m & 10 \\ 17 & 23 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+a & 4+b & 10 \\ 11+3a & -2+3b+4c & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & m & 10 \\ 17 & 23 & 29 \end{pmatrix}$$

De la igualdad tenemos:

$$2+a = 4 \wedge 4+b = m \wedge -2+3b+4c = 23$$

$$a = 2 \wedge b+4 = m \wedge 3b+4c = 25 \dots\dots\dots(1)$$

Como A es simétrica:

$$c = 4$$

Ahora en (1):

$$3b + 16 = 25$$

$$3b = 9$$

$$b = 3$$

También en (1):

$$3 + 4 = m$$

$$7 = m$$

$$m + b = 10$$

Rpta.: D

Resolución 68:

Por condición:

$$(A^T)^T = A^T$$

$$A = A^T$$

Aquí reconocemos que A es simétrica, luego, por propiedad se cumple que:

$$x + y = -3 \wedge x^2 + z = 5 \wedge 3y = -3$$

$$x + y = -3 \wedge x^2 + z = 5 \wedge y = -1$$

$$x + y = -3 \Rightarrow x - 1 = -3$$

$$x = -2$$

$$x^2 + z = 5 \Rightarrow 4 + z = 5$$

$$z = 1$$

$$\therefore x + y + z = -2$$

Rpta.: A

Resolución 69: De acuerdo con la teoría:

I. $(A+B)^2 = A^2 + AB + B^2$

Para que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ es necesario que $AB + BA = 0$, y esto no se obtiene sólo cuando AB es la matriz nula(F)

II. En el esquema:

$$B_{n \times p}^T \cdot A_{p \times 1}^T = (B^T \cdot A^T)_{n \times 1}$$

Observa que si $A_{p \times 1}^T \rightarrow A_{1 \times p}$, es decir A es una matriz fila(V)

III. Si $A^2 = 1$, A es una matriz involutiva y no necesariamente $A = I$ (F)

∴ Combinación correcta: FVF

Rpta.: B

Resolución 70: Considerando la traspuesta y la potencia de la matriz identidad, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} x^T = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 13 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + 5I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} x^T = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} x^T = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 13 & 31 \end{pmatrix}$$

Por propiedad de traspuesta:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 13 & 31 \end{pmatrix}^T$$

$$x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 20 & 31 \end{pmatrix}$$

Aquí fácilmente podemos reconocer que x es una matriz de orden 2×3 , luego:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 20 & 31 \end{pmatrix}$$

Por condición $\rightarrow b=2 \wedge p=6$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 2 & c \\ m & n & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{EFECTUANDO}} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 20 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c+4 & a+2c+6 \\ m+2n+6 & m+3n+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 20 & 31 \end{pmatrix}$$

De la igualdad, se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} a+c=4 \\ a+2c=7 \end{array} \right\} c=3 \wedge a=1$$

$$\left. \begin{array}{l} m+2n=14 \\ m+3n=13 \end{array} \right\} n=5 \wedge m=4$$

Ahora la matriz x es:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sum \text{ de elementos } = 21.$$

Rpta.: B

Resolución 71: En cada afirmación:

I. Veamos si A^2 es antisimétrica.

• Por condición:

$$A = -A^T$$

Observa que:

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^2 = -A^T \cdot -A^T$$

$$A^2 = (A \cdot A)^T$$

$$A^2 = (A^2)^T$$

Aquí reconocemos que A^2 es simétrica.

$\Rightarrow$ La afirmación es falsa(F)

II. Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces A^T es una matriz de orden $n \times m$.

• Esquema:

$$A_{m \times n} \cdot A_{n \times m}^T = (A \cdot A^T)_{m \times n}$$

$\Rightarrow$ La afirmación es verdadera(V)

III. Fácilmente podemos reconocer que si $A - A^T$ existe, A y A^T deben ser del mismo orden. Por tanto A es una matriz cuadrada, por condición, de orden " n ".

También reconocemos que BC es una matriz cuadrada de orden " n ".

• Esquema:

$$B_{n \times p} \cdot C_{p \times n} = (BC)_{n \times n}$$

Aquí podemos reconocer que B y C no necesariamente son matrices cuadradas.

$\Rightarrow$ La afirmación es falsa(F)

$\therefore$ Combinación correcta = FVF

Rpta.: E

Resolución 72: Sumando las ecuaciones:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Restando las ecuaciones:

$$4B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se plantea:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Traz } (A \cdot B) = 3 + 4$$

$$\therefore \text{Traz } (AB) = 7$$

Rpta.: C

Resolución 73: Por condición:

$$P(x) = x^2 - x + 1$$

$$P(A) = A^2 - A + I \dots\dots\dots(1)$$

Por dato:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora en (1) tenemos:

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Traz } (P(A)) = 1 + 1 + 3$$

$$\text{Traz } (P(A)) = 5$$

Rpta.: D

Resolución 74: Supongamos $B = B_1 + B_2$

Se pide calcular:

$$\text{Traz } (B) = \text{Traz } (B_1 + B_2)$$

$$\text{Traz } (B) = \text{Traz } (B_1) + \text{Traz } (B_2) \dots\dots\dots(1)$$

Donde:

$$B_1 = A^n + A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A^2 + A ; n \in \mathbb{N}$$

$$B_2 = (A^T)^n + (A^T)^{n-1} + (A^T)^{n-2} + \dots + (A^T)^2 + (A^T)$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Una rápida inspección permite observar que:

$$A^m = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{Traz } (A^m) = 2 - 1 = 1 ; \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ahora para la matriz B_1 tenemos:

$$\text{Traz } (B_1) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{n \text{ veces}}$$

$$\Rightarrow \text{Traz } (B_1) = n \dots\dots\dots(2)$$

Fácilmente podemos reconocer que:

$$(A^T)^K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} ; \forall K \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{Traz} \left((A^T)^K \right) = 2 - 1 = 1 ; \forall m \in \mathbb{N}$$

Ahora para la matriz B_2 tenemos:

$$\text{Traz} (B_2) = \underbrace{1+1+1+\dots+1+1}_{n \text{ veces}}$$

$$\Rightarrow \text{Traz} (B_2) = n \dots \dots \dots (3)$$

Con (2) y (3) en (1):

$$\text{Traz} (B) = n + n$$

$$\therefore \text{Traz} (B) = 2n$$

Rpta.: D

Resolución 75: De la igualdad, se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} \bullet a + 2c = 3a &\rightarrow a = c \\ \bullet 2b - 2c = 3b &\rightarrow b = -2c \\ \bullet -b + c = 3c &\rightarrow b = -2c \end{aligned} \right\} a + b = -c$$

Se pide calcular:

$$E = \frac{a+b}{c} = -\frac{c}{c}$$

$$E = -1$$

Rpta.: D

Resolución 76: De acuerdo con la teoría:

- I. La afirmación es verdadera (V)
- II. La afirmación es falsa (F)
- III. La afirmación es verdadera (V)

∴ Combinación correcta = VFV

Rpta.: B

Resolución 77: Por dato:

$$M = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{30} \quad (1)$$

Multiplicando por A:

$$A \cdot M = A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots + A^{31} \quad (2)$$

Efectuando (2)-(1):

$$AM - M = -I + A^{31}$$

$$AM - M + I = \frac{A^{31}}{\text{DMFO}}$$

$$\therefore AM - M + I = 2I$$

Rpta.: A

Resolución 78: Hallemos las potencias indicadas de las matrices dadas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$$

Donde $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n+3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por condición:

$$C = A^n \cdot (B^{n+1} - B^n) \dots\dots\dots(1)$$

$$\bullet B^{n+1} - B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n+3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{n+1} - B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora en (1) tenemos:

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1}-3 & 0 \\ 3^{n+1}+3 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa que:

$$\sum \text{elementos} = \frac{1}{2} (2 \cdot 3^{n+1}) = 3^{n+1}$$

Por condición:

$$3^{n+1} = 2187 = 3^7$$

$$n = 6$$

Rpta.: A

Resolución 79: Efectuando $C_2 - C_1$; $C_3 - C_4$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ 4 & 4 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_3 + F_2$; $F_4 + F_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ 7 & 8 & 0 & 14 \\ 8 & 9 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

Por teorema de Jacobi:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 14 \\ 8 & 9 & 15 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_3 - F_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 14 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Efectuando $C_2 - C_1$; $C_3 - C_1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por teorema de Jacobi:

$$E = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 - 3$$

$$\therefore E = 11$$

Rpta.: D

Resolución 80: Redefiniendo cada matriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 26 \\ 11 & 20 & 27 \\ 13 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\bullet D = AB + C = \begin{bmatrix} 10 & 19 & 26 \\ 11 & 20 & 27 \\ 13 & 23 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 11 & 20 & 27 \\ 12 & 22 & 29 \\ 14 & 25 & 33 \end{bmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$\text{Traz}(D) = 11 + 22 + 33$$

$$\therefore \text{Traz}(D) = 66$$

Rpta.: C

Resolución 81: Por condición:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Por fórmula:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 12 \\ -18 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^2 - I = \begin{pmatrix} -23 & 12 \\ -18 & -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 12 \\ -18 & -21 \end{pmatrix} \dots (1)$$

En la ecuación: $Ax + I = B^2$
 $Ax = B^2 - I$

Despejando x:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot Ax}_I = A^{-1} \cdot (B^2 - I)$$

$$I \cdot x = A^{-1} \cdot (B^2 - I) \dots\dots\dots(2)$$

Halleemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

Reemplazando (1) y (3) en (2)

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 12 \\ -18 & -21 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 30 & -45 \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$\text{Traz}(x) = \frac{1}{2} (-18 - 45)$$

$$\therefore \text{Traz}(x) = -31,5$$

Rpta.: E

Resolución 82: En cada enunciado.

1. Por teorema:

$$\text{Si } A \cdot B = I \Rightarrow A = B^{-1}$$

$\Rightarrow$ El enunciado es verdadero(V)

II. Por condición:

$$A = K \cdot B$$

$$A \cdot A = A \cdot K \cdot B$$

$$A^2 = K(AB)$$

$$A^2 = K(K \cdot B \cdot B)$$

$$A^2 = K^2 \cdot B^2$$

$$A \cdot A^2 = A \cdot K^2 \cdot B^2$$

$$A^3 = K^2(A \cdot B^2)$$

$$A^3 = K^2(K \cdot B \cdot B^2)$$

$$A^3 = K^3 \cdot B^3$$

⇒ El enunciado es verdadero(V)

II. Por condición:

$$AB = BA$$

$$\bullet A(mB + nI) = mAB + nA$$

$$\bullet (mB + nI) \cdot A = \underbrace{mBA}_{= mAB} + nA$$

Es evidente que $A(mB + nI) = (mB + nI) \cdot A$

⇒ El enunciado es verdadero(V)

∴ Combinación Correcta: VVV

Rpta.: A

Resolución 83: Se pide:

$$E = (A^{-1} \cdot B^{-1}) + 2(AB) - \frac{1}{6}I$$

$$E = (B \cdot A)^{-1} + 2(AB) - \frac{1}{6}I$$

Por dato:

$$\left. \begin{array}{l} A = 2I \\ B = 3I \end{array} \right\} AB = BA = 6I$$

$$\bullet (B \cdot A)^{-1} = (6I)^{-1} = \frac{1}{6} I^{-1} = \frac{1}{6} I$$

Finalmente:

$$E = \frac{1}{6} I + 2(6I) - \frac{1}{6} I$$

$$E = 12I$$

Rpta.: E

Resolución 84: En cada afirmación:

I. VERDADERO

$$\bullet \text{ Si } B=I \Rightarrow B^T=B^2$$

II. FALSO

$$\bullet \text{ Si } AB \in M \Rightarrow (AB)^T = AB$$

$$\begin{array}{ccc} B^T & \cdot & A^T = AB \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \cdot & A = AB \end{array}$$

¡Esta igualdad no es general!

III. FALSO

• Supongamos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = A$$

Pero A^{-1} no existe.

IV. VERDADERO

$$\bullet \text{ Si } A+B \in M \Rightarrow (A+B)^T = A+B$$

$$\begin{array}{ccc} A^T & + & B^T = A+B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & + & B = A+B \end{array}$$

V. VERDADERO

• Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; observa que $A^T \neq A$

Pero $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donde $(A^2)^T = A^2$; luego $A^2 \in M$

∴ 3 afirmaciones son verdaderas.

Rpta.: C

Resolución 85:

Fácilmente podemos reconocer que $|A| = -4$, luego como $|A| \neq 0$ decimos que la matriz tiene inversa denotada por A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \dots\dots\dots(1)$$

• $\text{Adj}(A) = \{ \text{cofact}(A) \}^T \dots\dots\dots(2)$

• $\text{Cofact}(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

En (2) tenemos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

En (1) tenemos:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma \text{ elementos} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-12)$$

$$\Rightarrow \Sigma \text{ de elementos} = 3$$

Rpta.: B

Resolución 86: Se tiene:

$$A^4 + 2A^3 + A + I = 0$$

Reescribiendo la ecuación matricial:

$$A^4 + 2A^3 + A + 2I = I$$

$$A \cdot A^3 + 2 \cdot A^3 + A + 2I = I$$

$$A^3(A + 2I) + (A + 2I) = I$$

$$(A + 2I) \cdot (A^3 + I) = I$$

Por teorema:

$$A + 2I = (A^3 + I)^{-1}$$

$$\therefore (A^3 + I)^{-1} = A + 2I$$

Rpta.: C

Resolución 87: Hallemos $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 + 3F_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Por el teorema de Jacobi:

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3(-3 + 4) = 3(1) = 3$$

- Hallemos A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \dots\dots\dots(1)$$

- Hallemos cofact (A)

$$\text{Cofact}(A) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofact}(A) = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\text{Adj}(A) = \{\text{Cofact}(A)\}^T$, tenemos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -12 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente en (1):

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 & 6 & 0 \\ -12 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En la expresión pedida:

$$M = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) - (-4) + 0$$

$$M = -1 + 4$$

$$M = 3$$

Rpta.: C

Resolución 88: La ecuación matricial es:

$$A^{4020} + A^{2011} + 2A^{2010} + A = 0$$

Reescribiendo la ecuación:

$$A^{4020} + A^{2011} + A^{2010} + A^{2010} + A = 0$$

Sumando la matriz identidad en cada miembro.

$$\begin{array}{c} A^{4020} + A^{2011} + A^{2010} + A^{2010} + A + I = I \\ \hline \left(A^{2010} + A + I \right) \quad \left(A^{2010} + I \right) = I \end{array}$$

Por teorema:

$$A^{2010} + A + I = \left(A^{2010} + I \right)^{-1}$$

$$\therefore \left(A^{2010} + I \right)^{-1} = A^{2010} + A + I$$

Rpta.: E

Resolución 89: Por condición: $A+B=C$

$$\begin{bmatrix} (0,2)^{x+2} - 1 & 1 \\ x+y+2z & 2^{7y+5} - 4^{3y+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$\text{I. } (0,2)^{x+2} - 1 = 24 \Rightarrow \left(\frac{1}{5} \right)^{x+2} = 25$$

$$5^{-x-2} = 5^2$$

$$-x-2 = 2$$

$$-x = 4$$

$$x = -4$$

$$\text{II. } 2^{7y+5} - 4^{3y+2} = 0 \Rightarrow 2^{7y+5} = 4^{3y+2}$$

$$2^{7y+5} = 2^{6y+4}$$

$$7y+5 = 6y+4$$

$$y = -1$$

$$\text{III. } x + y + 2z = 5 \Rightarrow -4 - 1 + 2z = 5$$

$$2z = 10$$

$$z = 5$$

Finalmente

$$E = x \cdot y \cdot z$$

$$E = (-4)(-1)(5)$$

$$E = 20$$

Rpta.: E

Resolución 90: En la ecuación matricial:

$$\left[\left((B^{-1})^T + A \right) x \right]^T = x^T \cdot A + B^{n-1}$$

$$\left[(B^{-1})^T \cdot x + Ax \right]^T = x^T \cdot A + B^{n-1}$$

$$\left((B^{-1})^T x \right)^T + (A \cdot x)^T = x^T \cdot A + B^{n-1}$$

$$x^T (B^{-1}) + x^T \cdot A^T - x^T \cdot A = B^{n-1}$$

$$x^T (B^{-1} + A^T - A) = B^{n-1}$$

Según condición $A^T = A$, reduciendo:

$$x^T \cdot B^{-1} = B^{n-1}$$

Multiplícamos por B

$$x^T \cdot B^{-1} \cdot B = B^{n-1} \cdot B$$

$$x^T \cdot I = B^{n-1+1}$$

$$x^T = B^n$$

$$x = (B^n)^T \dots\dots\dots(1)$$

Halleemos B^n

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⋮

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & -n & \frac{n^2-3n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & -n & \frac{n^2-3n}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ \frac{n^2-3n}{2} & -n & 1 \end{bmatrix}$$

Rpta.: E

Resolución 91:

Datos:

$$|A| = -2^8 ; |B| = 3 \text{ y } |C^T| = -1$$

Se pide calcular:

$$E = \frac{|2A| \cdot |B^T|}{2|2C| \cdot |A^T|}$$

Dando uso de las propiedades:

$$E = \frac{|2^3| |A| |B^T|}{2 \cdot |2^3| |C| |A^T|}$$

Por datos $|C^T| = |C| = -1$

$$E = \frac{|2^3| \cdot (-2^8) |B^T|}{|2^4| \cdot (-1) |A^T|}$$

$$E = \frac{|-2^{11}| |B^T|}{|-2^4| \cdot |A^T|}$$

$$E = \frac{(-2^{11})^3 |B^T|}{(-2^4)^3 |A^T|}$$

$$E = \frac{-2^{33} \cdot |B|}{-2^{12} \cdot |A|}$$

$$E = \frac{-2^{33} \cdot (3)}{-2^{12} \cdot (-2^8)}$$

$$E = \frac{-2^{33} - 3}{2^{20}}$$

$$E = -2^{13} \cdot 3$$

Rpta.: E

Resolución 92: Sumando $F_2; F_3; F_4$ y F_5 a la F_1

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_2 - F_1; F_3 - F_1; F_4 - F_1; F_5 - F_1$

$$4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

TRIANGULAR

$$|A| = 4 [(1)(-1)(-1)(-1)(-1)]$$

$$\therefore |A| = 4$$

Rpta.: D

Resolución 93: Sea:

$$|A| = |C^8 \cdot D^9|$$

$$|A| = |C^8| \cdot |D^9|$$

$$|A| = |C^8| \cdot |D^9| \dots\dots\dots(1)$$

Por dato:

$$\left. \begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 1 \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |D| = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$|A| = (1)^8 \cdot (1)^9 = (1)(1)$$

$$\therefore |A| = 1$$

Rpta.: A

Resolución 94: En cada afirmación:

$$\begin{aligned} \text{I. } |A \cdot \underbrace{|A| \cdot |A|}| &= |A| |A| \cdot |A|^n \\ &= |A \cdot |A|^{n+1}| \\ &= |A| \cdot (|A|^{n+1})^n \\ &= |A| \cdot |A|^{n^2+n} \\ &= |A|^{n^2+n+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La afirmación es falsa(F)

$$\text{II. } A \cdot A^T = I^{20} \rightarrow A \cdot A^T = I$$

$$|A \cdot A^T| = |I|$$

$$|A| \cdot |A^T| = 1$$

$$|A| \cdot |A| = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

$$|A| = \pm 1$$

$\Rightarrow$ La afirmación es verdadera(F)

$$\text{III. } AB + AB^T = 3I \rightarrow A \cdot (B + B^T) = 3I$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Observa que } B + B^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ahora en la condición: } A \cdot (B + B^T) = 3I$$

$$|A \cdot (B + B^T)| = |3I|$$

$$|A| \cdot |B + B^T| = 3^2 |I|$$

$$|A| \cdot (-9) = 9(1)$$

$$|A| = -1$$

$\Rightarrow$ La afirmación es falsa(F)

$\therefore$ Combinación Correcta = FVF

Rpta.: A

Resolución 95: Se pide:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$$

Efectuando $C_1 - C_2; C_3 - C_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} a-b & b & 0 & b \\ a-b & b & a-b & a \\ 0 & b & a-b & b \\ 0 & a & 0 & b \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_2 - F_1$

$$|A| = \begin{vmatrix} a-b & b & 0 & b \\ 0 & 0 & a-b & a-b \\ 0 & b & a-b & b \\ 0 & a & 0 & b \end{vmatrix}$$

Por teorema de Jacobi:

$$|A| = (a-b) \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-b \\ b & a-b & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$$

Efectuando $C_2 - C_3$

$$|A| = (a-b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-b \\ b & a-2b & b \\ a & -b & b \end{vmatrix}$$

Por el teorema de Jacobi:

$$|A| = (a-b) \cdot (a-b) \cdot \begin{vmatrix} b & a-2b \\ a & -b \end{vmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$|A| = (a-b)^2 \cdot (-b^2 - a^2 + 2ab)$$

$$|A| = (a-b)^2 \cdot [-(a-b)^2]$$

$$\therefore |A| = -(a-b)^4$$

Rpta.: A

Resolución 96: Se pide:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3x & y+2x & y+1 \\ 2y & y+1 & 2-y & 1 \\ x+2 & 0 & 1 & x+3 \\ y-1 & 1 & x+2 & x+y \end{vmatrix}$$

Efectuando $C_1 - C_2$; $C_4 - C_3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-2x & 3x & y+2x & 1-2x \\ y-1 & y+1 & 2-y & y-1 \\ x+2 & 0 & 1 & x+2 \\ y-2 & 1 & x+2 & y-2 \end{vmatrix}$$

son iguales

Nótese que $C_1 = C_4$

$$\therefore |A| = 0$$

Rpta.: C**Resolución 97:** Por propiedad:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ q & q+r & r+p \\ y & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

Respecto a la segunda columna de los determinantes obtenidos:

$$= \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ p & q & r+p \\ x & y & z+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c+a \\ p & r & r+p \\ x & z & z+x \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & c+a \\ q & q & r+p \\ y & y & z+x \end{vmatrix}}_{\text{ES CERO}} +$$

$$\begin{vmatrix} b & c & c+a \\ q & r & r+p \\ y & z & z+x \end{vmatrix}$$

Respecto a la tercera columna.

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a \\ p & q & p \\ x & y & x \end{vmatrix}}_{\text{ES CERO}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & c \\ p & r & r \\ x & z & z \end{vmatrix}}_{\text{ES CERO}} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & a \\ p & r & p \\ x & z & x \end{vmatrix}}_{\text{ES CERO}} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & c \\ q & r & r \\ y & z & z \end{vmatrix}}_{\text{ES CERO}} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Por condición: $\alpha = 2$

$$\Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 2 = 8 + 6 + 2$$

$$\therefore \alpha^3 + 3\alpha + 2 = 16$$

Rpta.: D

Resolución 98: Efectuando $F_2 - F_1; F_3 - F_1$

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} a^3 & 1 & a \\ b^3 - a^3 & 0 & b - a \\ c^3 - a^3 & 0 & c - a \end{vmatrix}$$

Por el teorema de Jacobi:

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} a^3 & \textcircled{1} & a \\ b^3 - a^3 & 0 & b - a \\ c^3 - a^3 & 0 & c - a \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = - \begin{vmatrix} b^3 - a^3 & b - a \\ c^3 - a^3 & c - a \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = \begin{vmatrix} (b-a)(a^2+ab+b^2) & (b-a) \\ (c-a)(a^2+ac+c^2) & (c-a) \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = -(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & 1 \\ a^2+ac+c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F(a; b; c) = -(b-a)(c-a)(a^2+ab+b^2-a^2-ac-c^2)$$

$$F(a; b; c) = (a-b)(c-a)(ab+b^2-ac-c^2)$$

$$F(a; b; c) = (a-b)(c-a)[b^2-c^2+ab-ac]$$

$$F(a; b; c) = (a-b)(c-a)[(b-c)(b+c)+a(b-c)]$$

$$F(a; b; c) = (a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c)$$

$\Rightarrow N^\circ$ de factores primos = 4

Rpta.: C

Resolución 99: Sea:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_1 - 2F_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_3 - F_2$; $F_4 - 2F_2$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por el teorema de Jacobi:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 19 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando $F_3 - F_2$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} -1 & 19 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por el teorema de Jacobi:

$$|A| = 2(4) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 8(-8) = -64$$

Finalmente tenemos:

$$\mu = \sqrt[3]{-64}$$

$$\mu = -4$$

Rpta.: E

Resolución 100: Por condición:

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ n & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & m \\ 5 & n \end{vmatrix}$$

$$2m + n = -4n - 5m$$

$$5n = -7m$$

Aquí reconocemos que:

$$(m = 5 \wedge n = -7) \vee (m = -5 \wedge n = 7)$$

Observa que el sistema que origina x_0 y y_0 es:

$$\begin{cases} -4x - y = m \\ 5x + 2y = n \end{cases}$$

Donde:

$$d = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 5 \Rightarrow d = -3$$

Ahora tenemos:

- Primero: Si $m = -5$; $n = 7$ y $d = -3$

$$\Rightarrow m + n + d = -1$$

- Segundo: Si $m = 5$; $n = -7$ y $d = -3$

$$\Rightarrow m + n + d = -5$$

Rpta.: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sean las matrices cuadradas A y B no nulas. De las siguientes proposiciones:

I. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

II. Si A y B son matrices conmutables,

entonces $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

III. Si A es simétrica y B es antisimétrica entonces: $A+B = (A-B)^T$.

¿Son verdaderas?

- A) I $\wedge$ II B) I $\wedge$ III C) II $\wedge$ III
D) Sólo II E) Sólo III

2. Si:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{pmatrix}$$

Cumplan la siguiente igualdad:

$$3A - B = C, \text{ indique el valor de:}$$

$$E = \frac{4!}{a \cdot b \cdot c \cdot d}$$

- A) -1 B) 1 C) 2
D) -2 E) 4

3. Dadas las matrices:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Indique la suma de elementos de la matriz $C = D$; siendo $C = M \cdot N$ y

$$D = N^T \cdot M^T$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

4. Si "A" es una matriz cuadrada de orden 3, tal que se puede representar por: $A = B + C$, donde B es una matriz simétrica y C es una matriz antisimétrica. Hallar la matriz de B.

A) $A + A^T$ B) $\frac{A^T + A}{2}$ C) $\frac{A + A^T}{4}$

D) No existe tal matriz E) $\frac{A^T - A}{2}$

5. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se puede afirmar que es una matriz:

- A) Hermitiana B) Nilpotente
C) Involutiva
D) Idempotente E) No singular

6. Si:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Indique:

$$S = (MN + NM)^n$$

A) 2^n B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D) $2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. Sea:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Además se sabe que:

$$P_{(x)} = 5 - 3x + 2x^2$$

$$F_{(x)} = -10 + 3x + x^2$$

$$\text{Hallar: } A = P_{(M)} + F_{(M)}$$

$$\text{A) } 5I \quad \text{B) } \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$$

$$\text{C) } 195I$$

$$\text{D) } \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{E) } 4I$$

8. Sea:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además se verifica que:

$$A^n = xA + yI; n \in \mathbb{N}, \text{ calcular:}$$

$$M = (x+y)^3$$

$$\text{A) } 1 \quad \text{B) } 2 \quad \text{C) } 8$$

$$\text{D) } 16 \quad \text{E) } 64$$

9. Sean M y N matrices de orden 2, tal que:

$$MN = NM; \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular el producto de todos los elementos de la matriz N, si la suma de todos sus elementos es cero y el determinante es 36.

$$\text{A) } -36 \quad \text{B) } 72 \quad \text{C) } -64$$

$$\text{D) } 125 \quad \text{E) } -128$$

10. Sea "A" una matriz de orden 2 cuyo determinante es igual a 4; la diferencia entre la suma de los elementos de la diagonal principal y la suma de los elementos de la diagonal secundaria es 8; si se suma "x" a cada elemento de la matriz "A" entonces el valor de su determinante es igual a (-4). Calcular el valor de "x"

$$\text{A) } -10 \quad \text{B) } -5 \quad \text{C) } -1$$

$$\text{D) } 4 \quad \text{E) } 15$$

11. Si se cumple:

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = n(abc) - a^n - b^n - c^n$$

Calcular "n".

$$\text{A) } 1 \quad \text{B) } 0 \quad \text{C) } 3$$

$$\text{D) } -3 \quad \text{E) } -1$$

12. Efectuar

$$A(x; y; z) = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

Evaluar para:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

$$xy + xz + yz = 5$$

Siendo $\{x; y; z\} \subset \mathbb{R}^+$

$$\text{A) } 4 \quad \text{B) } 16 \quad \text{C) } 64$$

$$\text{D) } 128 \quad \text{E) } 256$$

13. Si "W" es una raíz cúbica compleja de la unidad. Calcular el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$$

- A) $\sqrt{3} i$ B) $2\sqrt{3} i$ C) $3\sqrt{3} i$
D) i E) $-i$

14. Indicar uno de los factores primos de:

$$M_{(a, b, c)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

- A) $ab+ac+bc$ B) $a+b$
C) $a+c$
D) $b+c$ E) $a+b+c$

15. Efectuar el cálculo del determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

- A) 1 B) abc C) 0
D) $a+b+c$ E) $\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$

16. Resolver:

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & 2x+1 & x \\ x & x & x & 3+x \end{vmatrix} = 0$$

- A) 6 B) 17 C) $\frac{6}{9}$
D) 0 E) $-\frac{6}{17}$

17. Siendo

$$A = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Además $|A| = x(a-1)^y$; $\{x; y\} \subset \mathbb{Z}^+$

Calcular: $x+y$

- A) 5 B) 7 C) 6
D) 0 E) 1

18. Sea la matriz A definida por:

$$A = \{a_{ij}\}_{4 \times 4}$$

$$\text{Donde: } a_{ij} = \begin{cases} i & ; i > j \\ 1 & ; i = j \\ j & ; i < j \end{cases}$$

Calcular $\det(A)$

- A) 15 B) 30 C) -45
D) -60 E) -30

19. Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

- A) 5^4 B) -5^4 C) 5^5
D) -5^5 E) 5^6

20. Calcular el determinante de orden "n"

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & n \end{vmatrix}$$

- A) -2 B) $-2(n-2)$
 C) $(n-2)!$
 D) $(n-2)$ E) 0
21. Señale la suma de tres raíces de la ecuación polinomial que se obtiene al efectuar:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ax & x^2 \\ x^2 & a^2 & 2ax \\ 2ax & x^2 & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

- A) 3a B) 2a C) a
 D) 0 E) -a
22. Dada la matriz degenerada M, encuentre todos los valores de "x", indicando la suma:

$$M = \begin{bmatrix} 2(x-3) & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{bmatrix}$$

- A) 6 B) 8 C) 10
 D) -3 E) -6

23. Calcular:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

- A) $(n-1)!$ B) $(n-2)!$ C) $(n+1)!$
 D) $n!$ E) $(2n)!$

24. Halle el valor de:

$$S = \begin{vmatrix} i-4 & i-3 & i-2 & i-1 & i \\ i-3 & i-2 & i-1 & i & i+1 \\ i-2 & i-1 & i & i+1 & i+2 \\ i-1 & i & i+1 & i+2 & i+3 \\ i & i+1 & i+2 & i+3 & i+4 \end{vmatrix}$$

donde: $i = \sqrt{-1}$

- A) 0 B) 1 C) i
 D) 4i E) -1
25. Sean:
- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = A \\ 2x - 3y + z = B \\ x + y + z = AB \end{cases}$$

Donde x; y; z son matrices de orden 2.
 Señale $19x$.

$$A) \begin{bmatrix} 17 & 23 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B) \begin{bmatrix} -8 & 17 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C) \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D) \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad E) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

26. Sea:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver: $x - y = A$; $x + 2y = B$; siendo x; y; A; B matrices tales que:

$A = MN$; $B = NM$ Indique "x".

A) $\begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -5 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

D) $\exists x$

E) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

27. Calcular:

$$M = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -\sqrt{5} & 1 \\ 1 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

A) 100

B) 144

C) 121

D) 81

E) 169

28. Hallar la suma de los elementos de "A" si existe:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A) $\frac{1}{2}$

B) $-\frac{1}{2}$

C) 1

D) 0

E) -1

29. Consideremos a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{bmatrix}$$

Si la suma de los elementos de A^n es 704, donde $\{\theta; n\} \in \mathbb{Z}^+$ luego un posible valor de " $\theta \cdot n$ " es:

A) 10

B) 12

C) 14

D) 16

E) 18

30. Marcar (V) o (F):

I. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1$

II. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ a^b & b^2 \end{vmatrix} = 0$

III. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = -1$

A) VVV

B) FVF

C) VFF

D) FVV

E) VVF

31. La ecuación

$$\begin{vmatrix} x & m & m \\ m & x & m \\ m & m & x \end{vmatrix} = 0$$

es equivalente a:

A) $x^2 + mx - 2m^2 = 0$

B) $x^2 - mx + 2m^2 = 0$

C) $x^2 - mx - 2m^2 = 0$

D) $x^2 - 2mx - 2m^2 = 0$

E) $x^2 + mx + 2m^2 = 0$

32. Si: $\alpha; \beta \wedge \theta$ son las raíces de $x^3 + mx + m = 0$, proporcionar el equivalente de:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \theta \\ \beta & \theta & \alpha \\ \theta & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

A) -m

B) n

C) $m^2 - 4n$

D) 0

E) 1

33. ¿Cuál es el máximo número de factores primos de una Wandermordiana de quinto orden?

A) 10

B) 12

C) 14

D) 16

E) 18

34. Para qué valores de "m" se verifica:

$$\begin{vmatrix} 1+m^2 & 2m \\ 1-m^2 & 1-m^2 \\ 2m & 1+m^2 \\ 1-m^2 & 1-m^2 \end{vmatrix} = 1$$

- A) $\forall m \in \mathbb{R}$
 B) únicamente para $m \leq 0$
 C) $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$
 D) $\forall m \in \mathbb{R} - \{m/m^2=1\}$
 E) $\forall m \in \mathbb{R} - [-1; 1]$

35. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcular $\text{Traz}(A) + \text{Traz}(A^{-1})$

- A) 12 B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{13}{6}$
 D) $\frac{17}{6}$ E) 13

36. Si:
- $F(x) = x^2 - 5x + 3$
- encuentre:

$$|F(B-1)| \text{ ; donde } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- A) 4 B) 2 C) 1
 D) 5 E) 0

37. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ ; } i = \sqrt{-1}$$

- A) 2 B) -2 C) 2i
 D) -2i E) 0

38. Si:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 20$$

Encuentra el valor de:

$$2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- A) -60 B) 0 C) 140
 D) -140 E) 60

39. Calcular el determinante de matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{bmatrix}$$

- A) $(1-a)^3$ B) $(1-a^2)^3$ C) $(1-a)^4$
 D) $(1-a^3)^3$ E) $(1-a^4)^3$

40. Para qué valor de "x" se verifica

$$\begin{vmatrix} x+c & x & x & x \\ x & x+c & x & x \\ x & x & x+c & x \\ x & x & x & x+c \end{vmatrix} = 9c^4$$

- A) c B) c^2 C) 2c
 D) $\frac{c}{2}$ E) 9c

41. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcular $\text{Traz}(A+I)^{-1}$

- A) 13 B) $\frac{13}{6}$ C) $\frac{91}{60}$
D) $\frac{77}{60}$ E) $\frac{109}{60}$

42. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

- A) 0 B) -2 C) -1
D) 2 E) -2

43. Si: $\begin{cases} mq - np = 35 \\ m + q = 12 \end{cases}$

Además:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular la suma de todos los valores que pueden asumir la adición: $m+n+p+q$.

- A) 0 B) 2 C) 12
D) 6 E) 14

44. Si A es una matriz nilpotente, calcular el equivalente de: $A(I+A)^5$.

- A) A B) $I+A$ C) A^2
D) $I+A^2$ E) $I-A$

45. Encontrar la matriz inversa de A, donde:

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} -\cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \cos x & 1 \\ 1 & \cos x \end{bmatrix}$

E) I

46. Si A es una matriz no singular, calcular:

$$\text{Adj}(A^2 + 2A); \text{ si } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & -19 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

47. ¿Cuántas soluciones presenta la ecuación?

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) No tiene solución

48. Si $n \in \mathbb{N}^*$, calcular A^{3n} donde:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A) n B) n^2 C) $2n$
D) 1 E) 21

49. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. El producto de multiplicar dos matrices diagonales es otra matriz diagonal.

II. Si una matriz es antisimétrica todos los elementos de la diagonal principal son nulos.

III. Todas las matrices cuadradas admiten matriz inversa.

IV. El cuadrado de una matriz simétrica es otra matriz simétrica.

- A) VVVV B) VFFV C) VFFF
D) VVFF E) FFFF

50. Calcular:

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & ab \\ b^2+ab & 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

- A) $a^2(a+b)^2(a-b)^2$
B) $ab(a^2-b^2)$
C) $ab(a^2-b^2)^2$
D) $-ab(a+b)^2$
E) $-ab(a-b)^2$

51. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = A^{323}$$

encontrar la traza de: $B+B^T$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 7 E) 12

52. Determine la suma de los elementos de la matriz C, donde:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A) 70 B) 60 C) 50
D) 80 E) 90

53. Indica el valor de:

$(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)$ a partir de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ a+c \end{bmatrix}$$

- A) $a+b+c$ B) $ab+bc+ac$
C) abc
D) 1 E) 0

54. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & -e & f \end{bmatrix}$$

Calcular: $a+b+c+d+f+e$

Si: $AB=I$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

55. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De las proposiciones:

I. $A \cdot B = C$

II. $B \cdot C = A$

III. $A^2 = B^2 = C^2 = I$

IV. $A \cdot C = B$; son verdaderas:

A) I B) II y III C) II y IV

D) I y IV E) IV

56. Si "A" satisface: $x^3 + 5x^2 + 10x + 10I = 0$

$$\text{Donde: } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces el valor de:

$B \cdot C$ donde B y C son matrices cuadradas de elementos enteros que satisfacen:

$$5A = B^5 + C^5; \text{ es igual a:}$$

A) $A+I$ B) $A+2I$ C) $A-I$

D) $A-2I$ E) 0

57. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

es correcto que:

A) $|A| = ab|B|$ B) $|A| = (a-b)|B|$

C) $|A| = \frac{1}{a}|B|$

D) $|A| = (a+b)|B|$ E) $|A| = (b-a)|B|$

58. Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

A) 1032 B) -1024 C) 1033

D) -1027 E) -1032

59. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular $\text{TRAZ}(A^{-1})$

A) $\frac{17}{12}$ B) $\frac{25}{12}$ C) $\frac{23}{12}$

D) $\frac{19}{12}$ E) $\frac{29}{12}$

60. Calcular:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 - 4a^2 & (a+2)^2 - (a+3)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 - 4b^2 & (b+2)^2 - (b+3)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 - 4c^2 & (c+2)^2 - (c+3)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 - 4d^2 & (d+2)^2 - (d+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

A) $abcd$ B) $ab+cd$ C) $ab-cd$

D) $a+b+c+d$ E) 0

61. Si $w \neq 1$ es una raíz de la ecuación:

$x^3 = 1$, calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}$$

A) $\sqrt{3}i$ B) $2\sqrt{3}i$ C) $3\sqrt{3}i$

D) i E) $-i$

62. Si la matriz:

$$\begin{bmatrix} 2x-6 & x & -1 \\ x & x & -1 \\ 4 & 4 & x-4 \end{bmatrix}$$

Es singular proporcionar la suma de todos los valores de "x".

- A) 6 B) 8 C) 10
D) -3 E) -6

63. Proporcionar la suma de los elementos de
- A^{-1}
- .

Si: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

64. Determine
- $P(A)$
- , si:

$$P(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

donde: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- A) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

65. Si A y B son dos matrices imaginarias.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w^2 \end{bmatrix}$$

Calcular la traza de la matriz inversa de "C", sabiendo que:

$$C = \sum_{k=1}^{20} (A^{4k} B^{3k})$$

- A) 0,4 B) 0,3 C) 0,2
D) 0,1 E) 0,5

66. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hallar la relación entre $x \wedge y$ si se cumple que:

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$
D) $-\frac{3}{2}$ E) 2

67. Si A es una matriz involutiva proporcionar el equivalente de:

$$(I+A)(I-A)$$

- A) -A B) I C) 0
D) 2A E) A-2I

68. Sea
- $A = [a_{ij}]_n$
- donde
- $a_{ij} = 1 - N_{ij}$

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Calcular $|A|$

- A) n B) n-1
C) $(-1)^n \cdot n$
D) $(-1)^{n-1}$ E) $(-1)^n \cdot (n-1)$

MATRICES DETERMINANTES

69. Calcular la raíz cuadrada del determinante de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

- A) $a+b+c+d$ B) $a+b-c+d$
C) $abcd$
D) $a^2+b^2+c^2+d^2$ E) $ab-cd$
70. Mostrar el mayor elemento de la matriz x , si se cumple:

$B \cdot x \cdot A = C$, donde:

$C = \text{Adj}(B)$; $B = \text{Adj}(A)$ y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A) 512 B) 384 C) 0
D) 128 E) 256
71. Hallar el determinante de la matriz de orden " n " cuya suma de filas pares es igual a la suma de filas impares.
- A) n B) $2n$ C) $2n-1$
D) $2n+1$ E) 0
72. Marcar (V) o (F) siendo A una matriz cuadrada de orden " n " tal que $|A| = 0$

I) $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$

II) $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = |A|^{n-2}$

III) $\text{cofact}(\text{cofact}(A)) = |A|^{n-2}$ A

- A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FVV

73. Mostrar el equivalente de:

$$\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2000 & 2001 \\ 1997 & 1998 \end{vmatrix}}$$

- A) 3 B) -3 C) 1
D) $\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{3}$

74. Simplificar

$$\frac{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}}$$

- A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) $\frac{1}{2}$
75. Hallar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{vmatrix}$$

Cumplíndose que: $|z_1| = |z_2|$

- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) -1 E) 0
76. Resolver:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & 7 & -3 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \leq 0$$

- A) $\left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle$ B) $\langle -1; 0 \rangle$ C) $\left[-\frac{3}{2}; 1 \right]$
D) $\left[1; \frac{3}{2} \right]$ E) $\left[-\frac{3}{2}; 1 \right]$

77. Calcular el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}; \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^*$$

- A) $a+b+c$ B) $ab+ac+bc$
 C) abc
 D) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ E) $abc(a+b+c)$

78. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I) El producto de dos matrices diagonales del mismo orden es otra matriz diagonal.
 II) Toda matriz cuadrada se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una anti-simétrica.
 III) A y B son matrices de orden $n \times n$; $p, q \in \mathbb{R}$; si $A = pB + qI$ entonces A y B son conmutables.

- A) VVV B) VVF C) VFV
 D) FVV E) FFF

79. Si A y B son matrices de orden $n \times n$, determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I) Si $A^2 = I$; entonces $A = I$
 II) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$; α y β constantes
 III) $\text{Traz}(AB) = (\text{Traz } A)(\text{Traz } B)$

- A) VVV B) VVF C) FVF
 D) FVF E) FFF

80. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$B = AA^T$; determinar $F(B)$, si:

$$F(x) = 2x^5 + 1$$

- A) I B) $\left(\frac{1}{2}\right)I$ C) $2I$
 D) $3I$ E) B

81. Efectuar el siguiente producto matricial:

$$((345)(231)) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- A) (107) B) (109) C) (110)
 D) (111) E) (113)

82. Si A, B y C son matriciales cuadradas, donde se cumple que: $A = BC$ y $A + B = I$; I = matriz identidad de orden 2.

$$\text{Si: } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ Determinar la matriz}$$

$$x = AC - C$$

- A) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$
 C) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
 D) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

83. Si A y B son matrices simétricas de orden n y c ; es una matriz cuadrada de orden n que cumple la condición:

$$C^T + AB^T (C - I^T) = A^T (BC - I)$$

Determinar la matriz C.

- A) AB B) B - A C) A - B
D) (A - I)B E) (B - I)A

84. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I) $\exists n \in \mathbb{N} / A^n = I$
II) $\exists m \in \mathbb{N} / B^m = O$
III) $C^n = \begin{bmatrix} n & n \\ n & n \end{bmatrix} ; \forall n \in \mathbb{N}$

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FVF

85. Se define la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar la suma de los elementos de la primera columna de la matriz M^n ($n \in \mathbb{Z}^+$)

- A) $2^{n-1}(n^2+n+2)$
B) $2^n(n^2-n-2)$
C) $2^{n-3}(n^2+3n+8)$
D) $2^n(n^2+n)$
E) $2^{n-2}(n^2-2n+1)$

86. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinar la matriz x^{-1}

$$\text{Si: } 2x = 3 \{A - 2(B+C) - x\} + A$$

$$\text{A) } \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{B) } \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{C) } \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{D) } \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{E) } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

87. Si se cumple que:

$$A = |A| \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcular la traza de A^{-1} suponiendo que A es una matriz no singular.

- A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) 9
D) 36 E) 25

88. Dada la matriz ortogonal

$$B = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar $\text{Traz}(B^{-1})$

- A) $\sin(2\alpha)$ B) $\sin(\alpha) + 2$
C) $\cos(\alpha) + 2$
D) $2 \sin(\alpha) + 1$ E) $2 \cos(\alpha) + 1$

89. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Hallar la traza de la matriz A^{-1}

A) $\frac{3}{11}$ B) $\frac{2}{21}$ C) $-\frac{2}{11}$

D) $\frac{31}{21}$ E) $\frac{5}{11}$

90. Si:

$$A^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 26 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } A - (3I)^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 12A^{-1}$$

entonces el valor de $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ es:

A) 27 B) 25 C) 23
D) 21 E) 18

91. Si A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que
- $|A|=1$
- . Hallar el determinante de la matriz
- $B=A^2-A$
- (Traz A)

A) 1 B) 4 C) -4
D) $\frac{1}{2}$ E) -1

92. Si A es una matriz de orden
- 4×4
- y B es una matriz de orden
- 2×2
- ; tal que
- $|A|=3$
- ;
- $B=5$
- ; entonces el valor de:

$$M = \frac{\begin{vmatrix} 2A^T & B \\ B & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2A^T & A \end{vmatrix}} \text{ es}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

93. Hallar el valor de la determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

A) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

B) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

C) $ab + cd$

D) $abcd$

E) $(abcd)^2$

94. Hallar el valor determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 + \sqrt[3]{12} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \sqrt[3]{12} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \sqrt[3]{18} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - \sqrt[3]{18} \end{vmatrix}$$

A) 36 B) 72 C) 18
D) 54 E) 27

95. Hallar el valor determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

A) $2(n+2)!$ B) $(n-2)!$

C) $-2(n-2)!$

D) $3(n-2)!$ E) $-4(n-2)!$

96. Si:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = K \quad \begin{vmatrix} a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

97. Si A y B son dos matrices definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

el valor de $E = \frac{|A-B| - |2B|}{|A+B|^{-1}}$ es:

- A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 60
98. Si N es una matriz definida por:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces el valor del $\det(N)$ es:

- A) $3 \cdot (5^4)$ B) 5^4 C) $2 \cdot (5^4)$
D) $5 \cdot (3^4)$ E) $-3 (5^4)$
99. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{bmatrix}$$

entonces el valor del $\det(A)$ es:

- A) $a^n + b^{n+1}$
B) $a^n + (-1)^{n+1} \cdot b^n$
C) $a^n + b^{n+1}$
D) $2a^n$
E) $b^n + nab^{n-1}$

100. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n; entonces determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si $|A|=0$; entonces $A=0$
(0 es la matriz nula).
II. Si $|A^2|=0$; entonces $|A|=0$
III. $|A+B| \leq |A| + |B|$
- A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVF E) FFV

**CLAVES**

1	C
2	B
3	A
4	B
5	D
6	D
7	B
8	A
9	E
10	C
11	C
12	C
13	C
14	A
15	C
16	E
17	B
18	D
19	D
20	B
21	D
22	B
23	D
24	A
25	A

26	E
27	C
28	B
29	C
30	A
31	A
32	D
33	A
34	D
35	A
36	E
37	B
38	E
39	E
40	C
41	D
42	A
43	E
44	A
45	A
46	D
47	C
48	D
49	D
50	A

51	C
52	D
53	D
54	B
55	D
56	B
57	B
58	E
59	B
60	E
61	C
62	B
63	D
64	B
65	D
66	A
67	C
68	D
69	D
70	D
71	E
72	A
73	E
74	B
75	E

76	E
77	C
78	A
79	C
80	D
81	A
82	D
83	E
84	B
85	C
86	D
87	C
88	E
89	D
90	E
91	E
92	C
93	B
94	A
95	C
96	A
97	E
98	A
99	E
100	D

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNVI

PROBLEMA 01: Halle el conjunto solución del siguiente conjunto de inecuaciones:

$$\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1 - \sqrt{x} \geq 0$$

A) $[0, +\infty)$

B) $\langle 0, +\infty)$

C) $\langle 0, 1)$

D) $[0, 1]$

E) $[1, +\infty)$

Resolución:

1° Hallaremos el conjunto de valores admisibles (CVA).

2° Efectuaremos operaciones para eliminar radicales.

Piden resolver:

$$\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1 - \sqrt{x} \geq 0$$

- Hallando el CVA: $x \geq 0 \rightarrow \text{CVA} = \mathbb{R}_0^+$

- La inecuación se puede escribir de la siguiente manera.

$$\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1 - \sqrt{x} \quad \wedge \quad 1 - \sqrt{x} \geq 0$$

Completando cuadrados:

$$\sqrt{1^2 + \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} \cdot 1} \geq 1 - \sqrt{x} \quad \wedge \quad 1 \geq \sqrt{x}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{x})^2} \geq 1 - \sqrt{x} \quad \wedge \quad 1 \geq x$$

$$1 + \sqrt{x} \geq 1 - \sqrt{x} \quad \wedge \quad x \leq 1$$

$$\rightarrow 2\sqrt{x} \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

$$\rightarrow x \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 1$$

Entonces intersectando:



$\therefore [0, 1]$

Rpta.: D

PROBLEMA 02: Sean las funciones:

$$f_{(x)} = \sqrt[4]{|x|-8} - \sqrt{64-x^2}$$

$$g_{(x)} = (x^3) \operatorname{sgn}(x)$$

donde sgn es la función signo.Luego, el número de elementos de $\{(x, f(g(x)))\}$ es:

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución:

Veamos:

$$f_{(x)} = \sqrt[4]{|x|-8} - \sqrt{64-x^2}$$

Determinamos su dominio: $\operatorname{Dom} f = \text{CVA}$

$$|x|-8 \geq 0 \wedge 64-x^2 \geq 0$$

$$\leftrightarrow |x| \geq 8 \wedge 64 \geq x^2$$

$$\leftrightarrow (x \geq 8 \vee x \leq -8) \wedge (-8 \leq x \leq 8)$$

$$\leftrightarrow x = 8 ; -8$$

Entonces la función $f = \{(8; 0), (-8; 0)\}$

$$g_{(x)} = x^3 \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

Entonces:

$$g_{(x)} = \begin{cases} x^3 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$

Ahora veamos la composición:

$$1^\circ D(f \circ g) = \{x / x \in Dg \wedge g_{(x)} \in Df\}$$

$$= \{x / x \in Dg \wedge g_{(x)} \in \{8; -8\}\}$$

$$\rightarrow D(f \circ g) = \underbrace{\left\{ x/x \in \mathbb{R}^+ \wedge x^3 \in \{8; -8\} \right\}}_{\{2\}} \cup$$

$$\underbrace{\left\{ x/x \in \mathbb{R}^- \wedge -x^3 \in \{8; -8\} \right\}}_{\{-2\}} \cup$$

$$\underbrace{\left\{ x/x = 0 \wedge 0 \in \{8; -8\} \right\}}_{\emptyset}$$

$$\rightarrow D(f \circ g) = \{2; -2\}$$

2° Hallamos

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g_{(x)}); \forall x \in D(f \circ g)$$

$$x = 2: (f \circ g)_{(2)} = f(g_{(2)}) = f_{(8)} = 0$$

$$x = -2: (f \circ g)_{(-2)} = f(g_{(-2)}) = f_{(8)} = 0$$

$$\therefore (f \circ g) = \{(2; 0), (-2; 0)\}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 03:

Al resolver el sistema $\begin{cases} |z - 3i| = 2 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$ donde $z = x + iy$ es un número complejo; la

suma de las ordenadas de los puntos de solución es:

A) 9

B) 8

C) 7

D) 6

E) 5

Resolución:

Dado el sistema:

$$\begin{cases} |z - 3i| = 2 & \text{(I)} \\ y - x^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

La ecuación (I) representa una circunferencia con centro en $(0; 3)$ y radio $r = 2$.

Como $z = x + yi$ $\Leftrightarrow (x; y)$, la ecuación equivalente a I es $x^2 + (y - 3)^2 = 2^2$ (III)

De (III) obtenemos $x^2 = y - 1$, reemplazamos en (III) y obtenemos
 $y - 1 + (y - 3)^2 = 4$.

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow (y - 1)(y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 \vee y_2 = 4, \text{ reemplazando II}$$

Luego:

$$CS = \{(0; 1), (\sqrt{3}; 4), (-\sqrt{3}; 4)\}$$

$$\text{Piden: } 1 + 4 + 4 = 9$$

Rpta.: A

PROBLEMA 04: Halle el valor de x en la siguiente ecuación:

$$\log x^{\log x} - \log x - 6 = 0$$

Dé como respuesta a la suma de las soluciones.

A) 10,01

B) 99,99

C) 100,01

D) 999,99

E) 1 000,01

Resolución:

$$\widehat{\log x^{\log x}} - \log x - 6 = 0$$

$$(\log x) \cdot (\log x) - \log x - 6 = 0$$

$$(\log x)^2 - \log x - 6 = 0$$

$$\log x \quad \quad - 3$$

$$\log x \quad \quad + 2$$

$$(\log x - 3) \cdot (\log x + 2) = 0$$

$$\log x = 3 \vee \log x = -2$$

$$\underline{x = 10^3 \vee x = 10^{-2}}$$

estos valores garantizan la
existencia del logaritmo

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto, la suma de soluciones} &= 10^3 + 10^{-2} \\ &= 1000,01 \end{aligned}$$

Rpta.: E

- | | |
|-----------|--|
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad Algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número -Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logaritmación |
| 12 | Sucesiones - Series |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal - Gráficas de Relaciones |

Teléfonos: 424 - 6350
992 - 796104



/ fondoeditorialrodo

editorialrodo@gmail.com

TEMARIO ÁLGEBRA



N°

TEMA

1

Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales